SOLUCIONÁRIO

Curso de Física Básica - Volume 1

5º edição

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p} = \frac{d}{dt}(m.\vec{v}) = m.\frac{d}{dt}\vec{v} + \vec{v}.\frac{d}{dt}m$$

hugo.marques@fisica.ufc.br

2025

SOLUCIONÁRIO
CURSO DE FÍSICA BÁSICA - VOL. 1
5ª EDIÇÃO

Hugo Marques de Sousa*

2025

*hugo.marques@fisica.ufc.br

SUMÁRIO

2 Movimento unidimensional **14**
2.1 Lebre e Tartaruga . . . 15
2.2 Carro de corrida . . . 16
2.3 Média de velocidades . . . 17
2.4 Avião decolando . . . 18
2.5 Velocímetro do carro . . . 19
2.6 Partícula se movendo . . . 20
2.7 Tempo de reação . . . 21
2.8 Semáforo com sinal amarelo . . . 22
2.9 Ultrapassagem na rodovia . . . 23
2.10 Maquinista freando um trem . . . 24
a Acelerando o maior tempo possível e freando . . . 24
b Acelerando pouco, mantendo a velocidade constante e freando . . . 25
2.11 Malabarista . . . 26
2.12 Descobrindo quanto vale a aceleração da gravidade . . . 27
2.13 Lançamento de uma bola de vôlei . . . 28
a Velocidade inicial . . . 28
b Altura máxima . . . 28
c Altura da rede . . . 28
2.14 Altura do buraco . . . 29
2.15 A queda do vaso de plantas . . . 30
a Altura do edifício . . . 30
b Altura do edifício . . . 30
c Velocidade com que atinge o chão . . . 30
2.16 Lançamento de foguete . . . 31
a Altitude máxima . . . 31
b Velocidade ao atingir o solo e demora para chegar . . . 31
2.17 Análise gráfica . . . 33
a Traçando gráficos . . . 33
b Espaço percorrido . . . 34

c Posição final . . . 34
2.18 Integral e Derivada . . . 35
2.19 Analisando foto estroboscópica . . . 36

3 Movimento bidimensional 37
3.1 Caçando um macaco . . . 38
3.2 Deslocamento de avião . . . 40
a Vetor deslocamento total . . . 40
b Vetor velocidade média de Brasília à Belém . . . 40
c Vetor velocidade média de Brasília à Manaus . . . 41
3.3 A desigualdade triangular . . . 42
3.4 Ângulo entre vetores . . . 43
3.5 Usando coordenadas geográficas . . . 44
a Calculando as distâncias entre as três cidades . . . 44
b Vetor posição de Belo Horizonte . . . 46
3.6 Decolagem de um helicóptero . . . 47
a Magnitude do deslocamento . . . 47
b Ângulo que o helicóptero (no ar) faz com o solo . . . 47
c Direção do vetor deslocamento . . . 48
3.7 Pedra empurrada por enxurrada . . . 49
3.8 Água saindo de uma mangueira . . . 50
a Velocidade do jato de água . . . 50
b Altura atingida pelo jato . . . 50
3.9 Saque em um jogo de vôlei . . . 51
a Ângulo de lançamento . . . 51
b Velocidade ao atingir a altura do lançamento . . . 52
c Tempo decorrido . . . 52
3.10 Laçamento de bola de basquete . . . 53
3.11 O resultado de Galileu . . . 55
3.12 Generalização do problema anterior . . . 56
3.13 Batida de pênalti . . . 58
a Distância máxima do apanhador . . . 58
b Distância mínima da plateia . . . 59
3.14 Análise física de um gol . . . 60
a Ângulo de lançamento da bola . . . 60
b Incremento de velocidade impresso na bola . . . 60
3.15 Lançamento de um projétil . . . 62
a Ângulo de lançamento . . . 62
b Velocidade inicial . . . 62
c Alcance do projétil . . . 62
3.16 Tiro de canhão . . . 63
3.17 Pedra caindo de balão . . . 65
a Velocidade do balão . . . 65
b Altura da queda . . . 65
c Distância horizontal percorrida . . . 65
d Velocidade final da pedra . . . 65
3.18 Velocidade angular dos ponteiros do relógio . . . 66
a Ponteiro das horas . . . 66

b Ponteiro dos minutos . . . 66
c Ponteiro dos segundos . . . 66
3.19 Velocidade linear por conta do movimento do Planeta Terra . . . 67
3.20 Partícula em ultracentrífuga . . . 68
3.21 Hora que os ponteiros de um relógio coincidem . . . 69
3.22 Corrente em rodas . . . 70
3.23 Acelerando e freando uma roda . . . 71
3.24 Carro de corrida em pista circular . . . 72
a Distância percorrida entre 0 e 1 segundo . . . 72
b Vetor aceleração média entre 0 e 10 segundos . . . 72
3.25 Fumaça do trem . . . 74
3.26 Bombardeiro atingindo um carro . . . 75
3.27 Atravessando o rio . . . 76
a Tempo mínimo de travessia . . . 76
b Chegando do outro lado do rio na mesma coordenadas x . . . 76
3.28 Distância entre barcos . . . 78
3.29 Trens passando pela estação . . . 80
a Vetor velocidade relativa do segundo em relação ao primeiro . . . 80
b Deslocamento relativo . . . 80
c Distância mínima entre os trens . . . 81
3.30 Voo com vento entre duas cidades . . . 83
a Tempo total de voo . . . 83
b Comparação entre tempos de voo . . . 85
c O vento sempre aumenta o tempo de viagem . . . 85

4 Os princípios da dinâmica 86
4.1 Corpo em equilíbrio . . . 87
4.2 Acrobata em equilíbrio na corda . . . 88
4.3 Bloco em equilíbrio com viga . . . 89
4.4 Sistema de três massas em equilíbrio . . . 91
4.5 Dois corpos em equilíbrio conectados por fio . . . 93
4.6 Munição penetrando em árvore . . . 95
4.7 Pulo de pulga . . . 96
4.8 Queda do martelo . . . 97
4.9 Automóvel sem freio . . . 99
4.10 Criança no escorregador . . . 100
4.11 Corda com massa . . . 102
4.12 Disco sendo puxado por fio . . . 103
a Aceleração do disco . . . 103
b Tensão no fio . . . 103
4.13 Dispositivo girando em torno de eixo vertical . . . 104
a Valor de ω . . . 104
b Tensão no fio . . . 105

5 Aplicações das Leis de Newton 106
5.1 Astronauta pulando . . . 107
5.2 Pontos de Lagrange . . . 108
5.3 Átomo de Hidrogênio . . . 109
5.4 Bolinhas eletrizadas em equilíbrio . . . 110

5.5 Lançamento com resistência do ar . . . 112
5.6 Corpo em equilíbrio com molas . . . 114
5.7 Bloco lançado em plano inclinado . . . 116
a Distância máxima . . . 116
b Tempo de subida . . . 117
c Tempo de descida . . . 117
d Velocidade final . . . 117
5.8 Associação de molas . . . 118
a Molas em série . . . 118
b Molas em paralelo . . . 118
5.9 Máquina de Atwood . . . 120
5.10 Sistema de polias . . . 121
5.11 Pintor sobre uma plataforma . . . 123
5.12 Massas ligadas por fio nos lados de um triângulo . . . 124
5.13 Bloco deslizando na prancha . . . 126
a Atrito estático . . . 126
b Atrito cinético . . . 127
5.14 Bloquinho sobre prancha horizontal . . . 128
5.15 Blocos ligados por fio em plano inclinado com atrito . . . 129
5.16 Centrífuga de parque de diversões . . . 131
5.17 Velocidade máxima em uma curva . . . 132
5.18 Força aplicada por um trem sobre os trilhos . . . 133
5.19 Massa girando com velocidade angular ω . . . 134
5.20 Elétrons entre placas . . . 137
5.21 Elétron se movendo em campo magnético . . . 138
5.22 Feixe de prótons em campo magnético . . . 139

6 Trabalho e Energia Mecânica 140
6.1 Resolvendo um problema antigo com novas técnicas . . . 141
6.2 Máquina de Atwood partindo do equilíbrio . . . 142
a Velocidade de M . . . 142
b Verificando o resultado por Leis de Newton . . . 142
6.3 Força atuando em partícula em movimento . . . 143
a Pontos em que a velocidade anula . . . 143
b Gráfico da velocidade . . . 143
c Tipo de força . . . 144
6.4 Massas ligadas à polias partindo do repouso . . . 145
a Velocidade de cada bloco . . . 145
b A aceleração de cada bloco . . . 146
c Provando por Lei de Newton . . . 146
6.5 Atirando em um passarinho . . . 147
6.6 Contração da mola de uma balança . . . 148
6.7 Partícula com movimento unidimensional . . . 149
a Ao percorrer 2 m . . . 149
b Ao percorrer 3 m . . . 149
c Ao percorrer 4 m . . . 149
d Ao percorrer 6 m . . . 150
e Ao percorrer 7 m . . . 150

6.8 Partícula sobre efeito de uma força . . . 151
a Potencial associado à força . . . 151
b Posições de equilíbrio . . . 151
c Regime para movimento oscilatório . . . 152
d Movimento da partícula . . . 152
6.9 Lâminas delgadas ligadas por mola . . . 153
a Posição de equilíbrio . . . 153
b Comprimindo a lâmina superior . . . 153
c Valor limite de x . . . 153
6.10 Corda pendurada em polia . . . 154
6.11 Partícula em um poço de potencial . . . 155
6.12 Carrinho deslizando . . . 156
6.13 Sistema massa-mola com atrito . . . 157
a Deformação máxima da mola . . . 157
b Ao chegar na posição de equilíbrio . . . 157
c Dissipação da energia pelo atrito . . . 158
6.14 Oscilação de um pêndulo . . . 159

7 Conservação da energia no movimento geral 161
7.1 Trabalho da força mínima para manter o bloco em movimento . . . 162
7.2 Trabalho da força magnética sobre uma partícula . . . 163
7.3 Ângulo entre vetores arbitrários . . . 164
7.4 Ângulo entre as diagonais de um cubo . . . 165
7.5 Conta deslizando em aro circular . . . 166
a Trabalho da força de reação . . . 166
b Velocidade da conta em B . . . 166
7.6 Corpo segurado por mola em aro circular . . . 167
7.7 Partícula se movendo em circuito quadrado . . . 168
a Trabalho da força $\vec{F}_1 = 10.(y\ \hat{x} - x\ \hat{y})$ . . . 168
b Agora a força é $\vec{F}_2 = 10.(y\ \hat{x} + x\ \hat{y})$ . . . 168
c Caráter conservativo das forças . . . 169
d Potencial associado à $\vec{F}_2$ . . . 169
7.8 Partícula confinada em semi-espaço . . . 170
a Forças atuando sobre a partícula . . . 170
b Tipo de força que atua sobre z . . . 170
c Tipos de forças que atuam no plano xy . . . 170
d Formato das equipotenciais . . . 170
7.9 Oscilador harmônico tridimensional . . . 171
7.10 Bolinhas em estrutura triangular rígida . . . 172
a Energia potencial do sistema . . . 172
b Condição de equilíbrio para o sistema . . . 172
c Máximo e mínimo valor de l . . . 173
d Tipo de movimento do sistema . . . 173
7.11 Trabalho para remover um objeto da atração gravitacional da Terra . . . 174
7.12 Velocidade de escape da Lua . . . 175
7.13 Satélite síncrono . . . 176
a Distância da Terra . . . 176
b Velocidade inicial mínima . . . 176

7.14 Condições de equilíbrio . . . 178
a Equilíbrio na alavanca . . . 178
b Equilíbrio no plano inclinado . . . 178
7.15 Vagão ligado por corda em plano inclinado . . . 179
a Relação entre os deslocamentos, velocidades e acelerações . . . 179
b Deslocamento ao longo do plano . . . 179
7.16 Aceleração de um carro . . . 181
7.17 Bloco em plano inclinado com atrito indo de encontro à mola . . . 182
a Compressão da mola . . . 182
b Trabalho total dissipado pelo atrito . . . 183
c Após a compressão da mola . . . 183
7.18 Bolinha amarrada a fio . . . 184
a Velocidade mínima no ponto B . . . 184
b Valor da massa m . . . 184
7.19 Esquimó no iglu . . . 185
a Altura da queda do esquimó . . . 185
b Distância horizontal percorrida . . . 186
7.20 Carrinho no parque de diversões . . . 187
a Menor valor de altura inicial h_1 para fazer o *looping* . . . 187
b Valor da distância angular até o topo . . . 187
c Se a altura de lançamento for menor que o raio do *looping* . . . 188
7.21 Escada rolante . . . 189
a Potência da escada rolante . . . 189
b Trabalho sobre homem que sobe mais rapidamente . . . 189
c Homem correndo na escada . . . 189

8 Conservação do momento 190
8.1 Separando veículos espaciais . . . 191
8.2 Análise do disparo de um atirador . . . 192
a Velocidade de recuo da arma . . . 192
b Impulso transmitido ao ombro do atirador . . . 192
c Força média sobre o ombro . . . 192
8.3 Carreta carregando canhão . . . 193
a Velocidade inicial da carreta . . . 193
b Distância percorrida pela carreta . . . 193
8.4 Patinadores no gelo . . . 194
a Direção do patinador após o lançamento da bola . . . 194
b Módulo do vetor velocidade após o lançamento . . . 195
c Momento transferido ao patinador . . . 195
d Direção de lançamento da bola . . . 195
8.5 Remador na canoa . . . 196
8.6 Perseguição na mina abandonada . . . 197
8.7 Gafanhoto em folha . . . 198
8.8 Lançamento de rojão . . . 199
a Posição do fragmento mais leve . . . 199
b Velocidade dos fragmentos . . . 199
c Energia liberada pela explosão . . . 200
8.9 Velocidade inicial de fragmentos de mina . . . 201

8.10 Centro de massa de estrutura cúbica . . . 203
8.11 Centro de massa de estrutura quadrada . . . 204
a Considerando 3 triângulos iguais . . . 204
b Resolvendo o mesmo problema, mas com outras técnicas . . . 205
8.12 Centro de massa de uma placa circular homogênea . . . 206
8.13 Lançamento do foguete Saturno V . . . 207
a Velocidade de escape do combustível . . . 207
b Aceleração do foguete . . . 207
8.14 3° estágio do lançamento do foguete Saturno V . . . 208
a Velocidade de escape dos gases . . . 208
b Variação da velocidade . . . 208
8.15 Voo de um avião a jato . . . 209
a Força de Empuxo do jato . . . 209
b Potência do jato . . . 209
8.16 Movimento de uma corda com massa . . . 210
a Razão entre as forças aplicadas . . . 210
b O trabalho realizado . . . 210
8.17 Encantador de cobras . . . 212
8.18 Formação de uma gota . . . 213
a Crescimento do raio da gota . . . 213
b Aceleração da gota . . . 213
c determinando a constante . . . 213
8.19 Caminhão lançando água . . . 214
8.20 Nave espacial cilíndrica . . . 215
a Velocidade de recuo da nave espacial . . . 215
b Deslocamento da nave até o projétil atingir a parede . . . 215
c Movimento do centro de massa . . . 215
d Soma das posições inicial e final do centro de massa . . . 216
e Pulso de laser . . . 216
f Refazendo o item ***d*** . . . 216

9 Colisões **217**
9.1 Força de impulso em cada caso . . . 218
a Saque de jogo de tênis . . . 218
b Cobrança de pênalti . . . 218
c Pulando de um muro . . . 218
d Colisão entre carro e muro . . . 218
9.2 Teoria corpuscular da luz . . . 219
a Reflexão . . . 219
b Refração . . . 219
9.3 Colisão elástica em uma dimensão . . . 220
a Velocidade do centro de massa se conserva . . . 220
b Velocidades iniciais em relação ao centro de massa . . . 221
c Velocidades finais em relação ao centro de massa . . . 222
d Interpretação da colisão vista do centro de massa . . . 223
9.4 Sistema qualquer de duas partículas . . . 224
a Momentos em relação ao centro de massa . . . 224
b Energia cinética total . . . 224

c Energia cinética relativa ao centro de massa . . . 225
d Conservação da energia cinética interna . . . 226
e Fator Q de uma colisão inelástica . . . 226
9.5 Colisão unidimensional entre 3 partículas . . . 227
a Condição em que $m \leq m'$ . . . 227
b Condição em que $m > m'$ . . . 228
c Retornando ao item ***a***, mas sem a partícula 1 . . . 230
9.6 Energia transmitida em uma colisão . . . 231
a Fração f de energia cinética . . . 231
b Incluindo uma massa m'' no sistema . . . 232
9.7 Pêndulo de Newton . . . 235
a Transferindo uma velocidade v' a n' bolas . . . 235
b Caso em que $n = 2$ . . . 235
9.8 Pêndulo balístico . . . 237
9.9 Perícia analisando colisão . . . 238
9.10 A verdadeira quantidade de creme de leite . . . 239
9.11 Colisão entre caminhão e carro . . . 240
a Direção de deslocamento do conjunto após a colisão . . . 240
b Deslocamento total do conjunto após a colisão . . . 241
9.12 Colisão entre partículas idênticas vista do centro de massa . . . 242
9.13 Colisão entre átomo e molécula de Hidrogênio . . . 244
a Magnitude da velocidade do átomo após a colisão . . . 244
b Direção de movimento da mólecula e magnitude após a colisão . . . 246
9.14 Colisão elástica com deflexão de 90° . . . 247
a Valor de θ . . . 247
b Razão entre as massas e valor de v . . . 247
c Descrição do movimento no referencial do centro de massa . . . 248
9.15 A descoberta do nêutron . . . 250
a Razão entre a massa do nêutron e do próton . . . 250
b Velocidade inicial dos nêutrons . . . 251
9.16 Ângulo máximo de espalhamento elástico . . . 252
a Ângulo máximo de deflexão . . . 252
b Fração de energia absorvida pelo nêutron . . . 253
c Ângulo entre a direção de recuo e de incidência . . . 253
9.17 *Descrição de uma reação $d + d \rightarrow p + t$ . . . 255
a Energia dos p emergentes . . . 255
b Energia dos t associados aos p emergentes . . . 255
c Direção dos t emergentes em relação à direção de incidência . . . 255
9.18 Identificando núcleo através de uma colisão . . . 256
9.19 Colisão entre corpos com dimensões . . . 259
a Colisão vista do centro de massa . . . 259
b Vetor velocidade de cada disco após a colisão . . . 260
9.20 Resistência do ar na visão de Newton . . . 262

10 Gravitação **263**
10.1 Massa da Lua . . . 264
10.2 Satélite em órbita próxima à superfície de um Planeta . . . 265
a Período só depende da densidade . . . 265

b Período no de rotação de um satélite próximo à Terra 265
c Velocidade da órbita 265
10.3 Partícula em órbita circular 266
a Energia total da partícula 266
b Relação entre velocidade e raio da órbita 266
10.4 Satélite orbitando um Planeta p 267
a Velocidade de escape 267
b Aplicando à Terra 267
10.5 Densidade média do Sol 268
10.6 Movimento estrelar e terrestre 270
a Estimando a velocidade v_g 270
b Estimando a razão entre m_g e m_s 270
10.7 Deduzindo os resultados de Laplace 271
10.8 Sistema de 3 partículas em arranjo triangular 272
a Força gravitacional que atua em cada partícula 272
b Frequência angular de rotação das massas 273
10.9 Descrição de uma estrela binária 274
a Demonstrando relação entre períodos 274
b Período da estrela dupla Sirius A - Sirius B 274
c Raio da órbita de cada Estrela individualmente 275
10.10 Velocidade de corpos sujeitos à atração gravitacional 276
10.11 Atração entre duas esferas encostadas 277
10.12 Túnel que passa pelo centro da Terra 278
10.13 Campo gravitacional gerado por casca esférica 280
10.14 Distribuição de massa com cavidade 281
a Razão entre os campos gravitacionais 281
b Campo gravitacional dentro da cavidade 282
10.15 Energia potencial total associada a uma esfera homogênea 283
10.16 Atração gravitacional gerada por um fio retilíneo homogêneo 284
10.17 Atração gravitacional gerada por um anel 285

11 Rotações e momento angular **286**
11.1 Uma curva plana fechada orientada 287
a Significado de $\vec{a} \times \vec{b}$ 287
b Área orientada de tetraedro 287
11.2 Dipolo elétrico submetido a um campo elétrico 289
a Força e torque resultantes sobre o dipolo 289
b Energia potencial do dipolo 289
11.3 Vetor momento angular para sistema com duas partículas 291
11.4 Patinação no gelo e momento angular 293
a Vetor momento angular total 293
b Velocidade angular dos patinadores 293
11.5 O átomo de Bohr 294
a O raio das órbitas 294
b A energia das órbitas 294
c Razão entre a velocidade na primeira órbita e a velocidade da luz . 295
11.6 Partícula se movendo em campo de forças centrais 296
a Velocidade em coordenadas polares 296

b Energia total da partícula . . . 296
c Potencial efetivo no contexto da Gravitação . . . 297
11.7 Aplicando os resultados do Problema anterior . . . 299
a Mínimo do potencial efetivo e energia associada . . . 299
b Energia associada à órbita elíptica . . . 300
c Velocidade da partícula em uma órbita elíptica . . . 300
d Excentricidade da órbita elíptica . . . 301
11.8 Órbita elíptica e as Leis de Kepler . . . 302
a Momento angular em função da área da elipse . . . 302
b Obtendo a 3° Lei de Kepler . . . 302
c O período de Mercúrio . . . 303
11.9 Espalhamento Rutherford . . . 304
a Potencial efetivo no espalhamento . . . 304
b Menor distância entre as partículas . . . 304
11.10 Partícula se movendo em campo de forças centrais repulsivas . . . 306
a Potencial efetivo no sistema com força radial repulsiva . . . 306
b Menor distância entre a partícula e o centro de forças . . . 306
11.11 Momento angular do pneu de um carro fazendo curva . . . 307
11.12 Pêndulo cônico . . . 308
a Variação do comprimento do fio . . . 308
b Fator de variação da velocidade de rotação . . . 309
11.13 Sistema de massas ligadas por molas . . . 310
11.14 Regulador centrífugo . . . 311
a Velocidade angular final . . . 311
b Trabalho realizado sobre o sistema . . . 311
11.15 Discos ocupando vértice de um quadrado . . . 312
11.16 Movimento de um haltere após colisão . . . 313

12 Dinâmica de corpos rígidos 314
12.1 Teorema dos eixos perpendiculares . . . 315
12.2 Aplicando o Teorema dos eixos perpendiculares . . . 316
a Momento de inércia de placa com eixo de rotação no centro de massa 316
b Momento de inércia de círculo com eixo de rotação em seu diâmetro 316
12.3 Momento de inércia de lâmina homogênea em formato de anel . . . 317
a Em relação ao eixo perpendicular ao plano do anel . . . 317
b Eixo paralelo ao diâmetro do anel . . . 317
12.4 Momento de inércia de um cubo . . . 319
12.5 Momento de inércia de um cone . . . 320
12.6 Tempo para uma porta fechar . . . 321
12.7 O xerife e a mesa giratória . . . 322
a Velocidade angular da mesa . . . 322
b Fração da energia cinética que foi dissipada . . . 322
12.8 Movimento de um alçapão . . . 323
12.9 Massas ligadas por polia em plano . . . 324
a Aceleração linear das massas . . . 324
b Tensão em cada parte do fio . . . 325
12.10 Massas ligadas por polia em plano inclinado . . . 326
12.11 Estojo amarrado com fita no teto . . . 327

a Aceleração linear do estojo . . . 327
b A tensão na corda . . . 327
c Velocidade linear do estojo após desenrolar um comprimento s da fita 327
12.12 Disco circular sobre plano inclinado . . . 329
a Aceleração da massa m' . . . 329
b A tensão na fita . . . 330
12.13 Movimento de haste metálica delgada . . . 331
a Momento de inércia em torno do eixo de rotação . . . 331
b Velocidade e aceleração angulares após deslocamento angular θ . . . 331
12.14 Roda cilíndrica subindo em plano inclinado . . . 333
12.15 Bola rolando em domo esférico . . . 334
a Ângulo em que a bola desprende do domo . . . 334
b Velocidade linear no momento do desprendimento . . . 335
12.16 Movimento de ioiô . . . 336
a Condição do módulo da força para que o ioiô permaneça no chão . . . 336
b Aceleração angular do ioiô . . . 336
12.17 Esfera se deslocando em plano horizontal com atrito . . . 337
a Distância percorrida até começar a rolar . . . 337
b Tempo decorrido até a rotação iniciar . . . 338
c Velocidade da esfera quando a rotação inicia . . . 338
12.18 Movimento de giroscópio . . . 339
12.19 Pião cônico . . . 340
a Posição do centro de massa . . . 340
b Velocidade angular de precessão . . . 341
c Força de reação horizontal na base do pião . . . 341
d Encontrando os valores de Ω e F . . . 341
12.20 Tambor cilíndrico subindo degrau . . . 342
12.21 Ângulo formado pela escada para não escorregar . . . 343
12.22 Distância máxima que um homem pode subir na escada . . . 344
12.23 Empilhando blocos . . . 345

13 Forças de Inércia **346**
13.1 O problema do caçador e o macaco do ponto de vista do macaco . . . 347
13.2 Sistema massa-mola submetido à aceleração . . . 348
a Amplitude da oscilação . . . 348
b Período da oscilação . . . 348
c Compressão máxima da mola . . . 348
13.3 Lançando bola em caminhão acelerado . . . 349
13.4 Balança no elevador . . . 350
13.5 Caixote dentro de caminhão freando . . . 351
a Velocidade do caixote ao caminhão parar . . . 351
b Deslocamento relativo do caixote . . . 351
13.6 Bloco em cunha acelerada . . . 353
13.7 Balde com água em rotação . . . 354
13.8 Latitude que maximiza a distância angular entre o fio de prumo e a direção radial verdadeira . . . 356
13.9 Força de Coriolis . . . 357
a Módulo da força de Coriolis . . . 357

b Raio de curvatura do movimento circular 357
13.10Deflexão de um raio luminoso 358
13.11Estimando o valor de γ para uma distribuição contínua 359

CAPÍTULO

2

MOVIMENTO UNIDIMENSIONAL

"Conhece-te a ti mesmo e conhecerás o universo e os deuses."

Sócrates

2.1 Lebre e Tartaruga

Todas as variáveis com índice t são da tartaruga e todas as variáveis com índice l são da lebre.

Vamos colocar todas as variáveis no Sistema Internacional. Então:

$$v_l = 30\ \frac{km}{h} = 30\ \frac{1000\ m}{3600\ s} = \frac{30}{3,6}\ \frac{m}{s}$$

$$v_t = 1,5\ \frac{m}{min} = 1,5\ \frac{m}{60\ s} = \frac{1,5}{60}\ \frac{m}{s}$$

Em $\Delta t = 0,5\ min = 30\ s$, a lebre percorreu a seguinte distância (partindo da origem):

$$\Delta x_{li} = v_l.\Delta t = \frac{30}{3,6}.30\ m \Rightarrow x_{l_i} = \frac{900}{3,6}\ m$$

Neste momento, a tartaruga está em (partindo da origem):

$$\Delta x_{ti} = v_t.\Delta t = \frac{1,5}{60}.30 \Rightarrow x_{t_i} = \frac{1,5}{2}\ m$$

Como sabemos a posição em que a lebre está, podemos calcular o tempo que ela levaria para chegar na linha de chegada a partir deste ponto:

$$\Delta x_{lf} = v_l.\Delta t_1 \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{\Delta x_{lf}}{v_l} = \frac{600 - x_{l_f}}{v_l} = \frac{600 - \frac{900}{3,6}}{\frac{30}{3,6}} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{600.3,6 - 900}{30}\ s$$

Isto significa que, se a lebre sair do ponto em que está cochilando (que calculamos em x_{l_i}), chegará em Δt_1 segundos no final da corrida! Então, perceba que, para a lebre ganhar a corrida, basta que ela acorde quando faltar Δt_1 para a tartaruga chegar ao final.

Vamos verificar a distância percorrida pela tartaruga em Δt_1:

$$\Delta x_t = v_t.\Delta t_1 = \frac{1,5}{60}.\frac{600.3,6 - 900}{30} \Rightarrow \Delta x_t = \frac{1,5.(600.3,6 - 900)}{1800}\ m$$

Então, a lebre deve acordar e começar a correr quando a tartaruga estiver na posição $600 - \Delta x_t$. Vamos calcular o tempo que a tartaruga levar para chegar a este ponto, isto é, a quantidade de tempo que a lebre dormirá (Vamos usar o índice "s"de "soneca"no tempo). Lembre-se que a tartaruga não está na origem, está em x_{t_i}, isso implica que a variação da posição da tartaruga é $600 - \Delta x_t - x_{t_i}$:

$$\Delta x_t = v_t.\Delta t_s \Rightarrow \Delta t_s = \frac{\Delta x_t}{v_t} = \frac{600 - \Delta x_t - x_{t_i}}{v_t} = \frac{600 - \frac{1,5.(600.3,6-900)}{1800} - \frac{1,5}{2}}{\frac{1,5}{60}}$$

Isso nos dará algo em torno de $\Delta t_s = 23928\ s$ que, dividindo por 3600, teremos $\Delta t_s = 6,64\ h$.

2.2 Carro de corrida

A aceleração é variação de velocidade por unidade de tempo. Como a unidade da velocidade está em km/h, vamos dividir seu valor por $3,6$ para colocá-lo em m/s. logo, a aceleração do carro é:

$$a_c = \frac{\Delta v_c}{\Delta t} = \frac{\frac{100}{3,6} - 0}{\Delta 4} = \frac{100}{4.3,6} \Rightarrow a_c = 6,94 \ \frac{m}{s^2}$$

Vamos expressar esta aceleração em função da aceleração da gravidade:

$$a_c = a_c.\frac{g}{g} = \frac{a_c}{g}.g = \frac{6,94}{9,81}.g \Rightarrow a_c = 0,71.g$$

Para descobrir a distância percorrida podemos usar a equação horária da posição: $x = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x.t^2}{2}$, assim como a equação de Torricelli: $v_x^2 = v_{0x}^2 + 2.a_x.\Delta x$. Isolarei Δx da equação de Torricelli e usarei ela:

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2.a_x.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2.a_x} = \frac{(100/3,6)^2 - 0}{2.\frac{100}{4.3,6}} \Rightarrow \Delta x = 55,6 \ m$$

2.3 Média de velocidades

A velocidade média é a razão entre a distância percorrida e o tempo levado, então vamos calcular o tempo que leva para percorrer cada respectivo intervalo.

Para um intervalo qualquer i, teremos:

$$\Delta x_i = v_{x_i}.\Delta t_i \Rightarrow \Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{v_{x_i}}$$

- Intervalo 1: 10 km a 40 km/h

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta x_1}{v_{x_1}} = \frac{10}{40} \Rightarrow \Delta t_1 = \frac{1}{4}\ h$$

- Intervalo 2: 10 km a 80 km/h

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta x_2}{v_{x_2}} = \frac{10}{80} \Rightarrow \Delta t_2 = \frac{1}{8}\ h$$

- Intervalo 3: 10 km a 30 km/h

$$\Delta t_3 = \frac{\Delta x_3}{v_{x_3}} = \frac{10}{30} \Rightarrow \Delta t_3 = \frac{1}{3}\ h$$

Agora podemos calcular a velocidade média:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{10 + 10 + 10}{\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{3}} = \frac{30}{\frac{8.3}{3.8.4} + \frac{4.3}{4.3.8} + \frac{4.8}{4.8.3}} = \frac{30.4.8.3}{8.3 + 4.3 + 4.8} \Rightarrow v_m = 42,4\ \frac{km}{h}$$

E a média das velocidades será:

$$< v >= \frac{v_1 + v_2 + v_3}{3} = \frac{40 + 80 + 30}{3} \Rightarrow < v >= 50\ \frac{km}{h}$$

2.4 Avião decolando

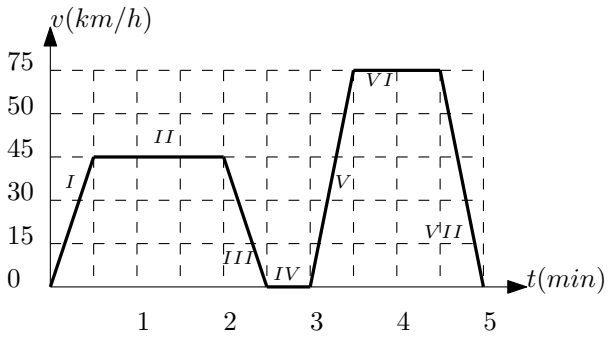
Podemos descobrir o tempo que demora para atingir a velocidade com a equação de cálculo da aceleração média. Considerando que o avião parte do repouso, obtemos:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta v}{a_m} = \frac{\frac{500}{3,6}}{4} \Rightarrow \Delta t = 34,7\ s$$

Vamos usar a equação horária da posição para descobrir Δx:

$$x = x_0 + v_{0x}.t + \frac{1}{2}.a_x.t^2 \Rightarrow \Delta x = 0.\frac{\frac{500}{3,6}}{4} + \frac{1}{2}.4.\left(\frac{\frac{500}{3,6}}{4}\right)^2 = 2.\left(\frac{\frac{500}{3,6}}{4}\right)^2 \Rightarrow \Delta x = 2,41.10^3\ m = 2,41\ km$$

2.5 Velocímetro do carro



Sabemos que a distância percorrida é a área em baixo da curva do gráfico de velocidade $\times$ tempo e a aceleração é a curva tangente ao gráfico de velocidade $\times$ tempo. Com apenas isto já podemos construir os gráficos.

A aceleração média em cada intervalo é medida a partir da variação de velocidade (em m/s) e da variação temporal (em s).

- Entre 0 e 1 minuto

  A variação de velocidade:

$$\Delta v = \frac{45}{3,6} - 0 \Rightarrow \Delta v = \frac{45}{3,6}\ \frac{m}{s}$$

  A variação temporal:

$$\Delta t = 1.60 - 0 \Rightarrow \Delta t = 60\ s$$

  A aceleração média:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\frac{45}{3,6}}{60} \Rightarrow a_m = 0,21\ \frac{m}{s^2}$$

- Entre 2 e 3 minutos

  A variação de velocidade:

$$\Delta v = 0 - \frac{45}{3,6} \Rightarrow \Delta v = -\frac{45}{3,6}\ \frac{m}{s}$$

  A variação temporal:

$$\Delta t = 3.60 - 2.60 = (3-2).60 \Rightarrow \Delta t = 60\ s$$

  A aceleração média:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-\frac{45}{3,6}}{60} \Rightarrow a_m = -0,21\ \frac{m}{s^2}$$

2.6 Partícula se movendo

Para traçarmos os gráficos $x(t)$ e $v(t)$, naturalmente, precisamos das funções. Podemos obter elas a partir da equação da aceleração e de certas condições de contorno.

A função velocidade é a integral da aceleração em relação ao tempo:

$$v(t) = \int a(t)\ dt = \int (b.t)\ dt = b. \int t\ dt \Rightarrow v(t) = b.\frac{t^2}{2} + b.C$$

Em $t = 0\ s$ a partícula está em repouso (condição de contorno). Isto implica que:

$$v(0) = 0 \Rightarrow b.\frac{0^2}{2} + b.C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Logo, a função que rege a velocidade é:

$$v(t) = b.\frac{t^2}{2}$$

A função posição é a integral da velocidade no tempo:

$$x(t) = \int v(t)\ dt = \int (b.\frac{t^2}{2})\ dt = \frac{b}{2}. \int t^2\ dt \Rightarrow x(x) = \frac{b}{2}.\frac{t^3}{3} + \frac{b}{2}.C = \frac{b}{6}.t^3 + \frac{b}{2}.C$$

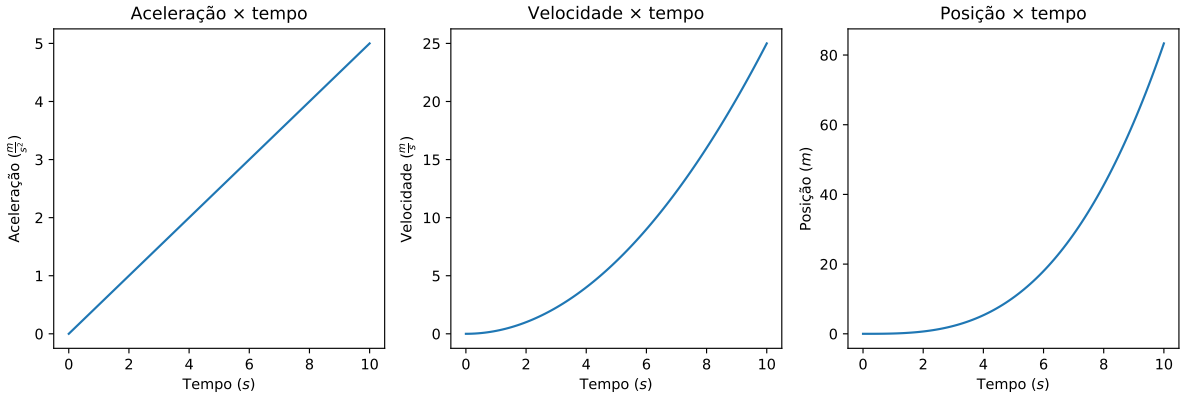
Em $t = 0\ s$ a partícula está origem (condição de contorno). Isto significa que:

$$x(0) = 0 \Rightarrow \frac{b}{6}.0^3 + \frac{b}{2}.C = 0 \Rightarrow C = 0$$

Assim, obtemos também a função posição:

$$x(t) = \frac{b}{6}.t^3$$

Fazendo $b = 0,5\ \frac{m}{s^3}$ e o tempo t variando de 0 a 10 segundos, os gráficos, ficam:



2.7 Tempo de reação

Em todos os casos vamos usar a equação de Torricelli e isolar a distância Δx. Para a i-ésima situação, temos o seguinte:

$$v_i^2 = v_{0_i}^2 - 2.a_i.\Delta x \Rightarrow 0 = v_{0_i}^2 - 2.a_i.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_{0_i}^2}{2.a_i}$$

Mas lembre-se que há um tempo de reação t. Neste período de tempo, o carro percorre:

$$\Delta x' = v_{0_i}.t$$

Assim, a distância total percorrida antes de o carro parar é:

$$\Delta X = \Delta x + \Delta x' \Rightarrow \Delta X = \frac{v_{0_i}^2}{2.a_i} + v_{0_i}.t$$

- Para $v_{0_i} = 30\ \frac{km}{h}$

$$\Delta X = \frac{(\frac{30}{3,6})^2}{2.6} + \frac{30}{3,6}.0,7 \Rightarrow \Delta X = 11,6\ m$$

- Para $v_{0_i} = 60\ \frac{km}{h}$

$$\Delta X = \frac{(\frac{60}{3,6})^2}{2.6} + \frac{60}{3,6}.0,7 \Rightarrow \Delta X = 34,8\ m$$

- Para $v_{0_i} = 90\ \frac{km}{h}$

$$\Delta X = \frac{(\frac{90}{3,6})^2}{2.6} + \frac{90}{3,6}.0,7 \Rightarrow \Delta X = 69,6\ m$$

2.8 Semáforo com sinal amarelo

O carro conseguir atravessar significa que o mesmo percorre o a distância que está do cruzamento (30 m) e o cruzamento (15 m) no tempo em que o sinal amarelo fica aceso (3 s). Usando a equação horária da posição, com $a_x = 3\ \frac{m}{s^2}$ (acelerando), obtemos:

$$x = x_0 + v_{0_x}.t + \frac{1}{2}.a_x.t^2 \Rightarrow v_{0_x} = \frac{\Delta x - \frac{1}{2}.a_x.t^2}{t} = \frac{45 - \frac{1}{2}.3.3^2}{3} \Rightarrow v_{0_x} = 10,5\ \frac{m}{s} = 38\ \frac{km}{h}$$

Agora considerando a situação em que queremos frear o carro, precisamos considerar Δx apenas como a distância até o cruzamento (30 m) já que não queremos cruzá-lo. E agora a aceleração é $-5\ \frac{m}{s^2}$ (freando):

$$v_{0_x} = \frac{30 + \frac{1}{2}.5.3^2}{3} \Rightarrow v_{0_x} = 17,5\ \frac{m}{s} = 63\ \frac{km}{h}$$

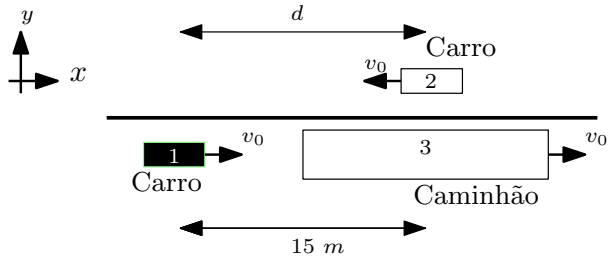
Caso queira considerar o tempo de reação, teremos um termo $v_{0_x}.t_r$ subtraindo Δx, em que t_r é o tempo de reação. E o tempo t será trocado por $t - t_r$. Desta forma, obtemos:

$$v_{0_x} = \frac{\Delta x - v_{0_x}.t_r - \frac{1}{2}.a_x.(t - t_r)^2}{t - t_r} \Rightarrow v_{0_x} + \frac{v_{0_x}.t_r}{t - t_r} = \frac{\Delta x - \frac{1}{2}.a_x.(t - t_r)^2}{t - t_r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{0_x} = \frac{t - t_r}{t}\frac{\Delta x - \frac{1}{2}.a_x.(t - t_r)^2}{t - t_r}$$

2.9 Ultrapassagem na rodovia

Na imagem temos em preto nosso carro (número 1), talvez ela facilite a visualização do problema.



Nosso carro é o único que tem aceleração, logo é o único que pode variar a velocidade. A velocidade do nosso carro, em função do tempo, é:

$$v_1 = v_0 + a.t$$

Então nossa velocidade com relação aos outros automóveis (velocidade relativa)* é:

$$v_{1/2} = v_1 - v_2 = v_0 + a.t - (-v_0) \Rightarrow v_{1/2} = 2.v_0 + a.t$$

$$v_{1/3} = v_1 - v_3 = v_0 + a.t - v_0 \Rightarrow v_{1/3} = a.t$$

A distância entre o carro 1 e o carro 2 é crucial, pois ela definirá se é seguro ou não a ultrapassagem. Sua variação com o tempo é:

$$D = d - \int v_{1/2}\, dt = d - \int (2.v_0 + a.t)\, dt = d - 2.v_0 \int dt - a. \int t\, dt \Rightarrow D = d - 2.v_0.t - \frac{1}{2}a.t^{2\dagger}$$

O tempo que levará para o nosso carro ultrapassar e ficar 15 m a frente do caminhão é:

$$\Delta x = v_{0_{1/3}}.\Delta t + \frac{1}{2}.a.\Delta t^2 = 0.\Delta t + \frac{1}{2}.a.\Delta t^2 \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{2.\Delta x}{a}}$$

Quando percorrido este tempo, a distância D pode ser zero, pois a ultrapassagem já foi feita:

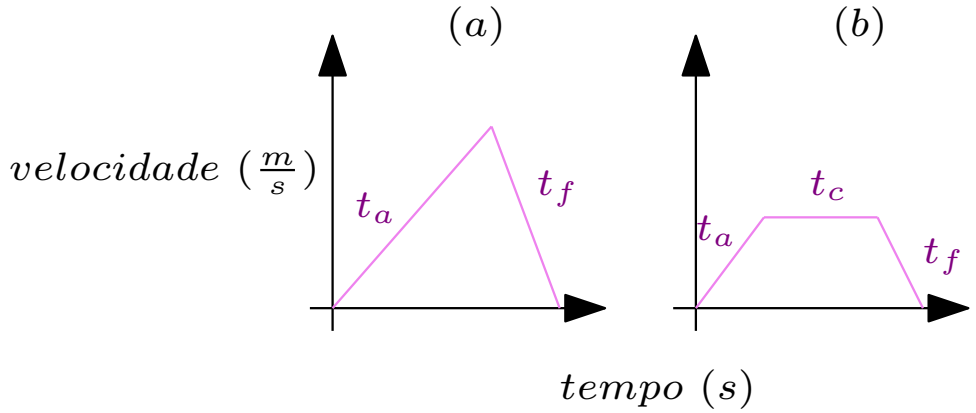
$$0 = d - 2.v_0.\sqrt{\frac{2.\Delta x}{a}} - \frac{a}{2}.\frac{2.\Delta x}{a} \Rightarrow d = 2.v_0.\sqrt{\frac{2.\Delta x}{a}} + \Delta x = 2.\frac{80}{3,6}.\sqrt{\frac{2.30}{3}} + 30 \Rightarrow d = 229\, m$$

*Sempre usaremos a seguinte notação: $v_{a/b}$ é a velocidade do a vista do b.

†Verifique que a constante de integração é nula!

2.10 Maquinista freando um trem

Usaremos a seguinte notação de índices: a é acelerando, c é mantendo a velocidade constante e f é freando.



a Acelerando o maior tempo possível e freando

Percorreremos uma distância Δx_a acelerando e uma distância Δx_f freando, tal que $\Delta x_a + \Delta x_f = d$, e a relação entre os tempos (que é oque nos interessa) é $t = t_a + t_d$. O tempo desacelerando é, pela equação horária da velocidade:

$$v_{f(f)} = v_{o(f)} - f.t_f = 0 \Rightarrow t_f = \frac{v_{o(f)}}{f}$$

Como partimos do repouso, $v_{o(f)} = a.t_a$. Assim, obtemos:

$$t_f = \frac{a}{f}.t_a$$

Da relação entre os tempos, temos que:

$$t = t_a + t_f = t_a + \frac{a}{f}.t_a = t_a.\left(1 + \frac{a}{f}\right) \Rightarrow t_a = \frac{t}{1 + \frac{a}{f}} = \frac{t.f}{f + a}$$

Da velocidade média, temos:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{\Delta x_a + \Delta x_f}{t_a + t_f} = \frac{\frac{1}{2}.a.t_a^2 + v_{0(f)}.t_f - \frac{1}{2}.f.t_f^2}{t_a + t_f}$$

Como $t_a + t_f = t$, os numeradores se cancelam. Agora vamos deixar tudo em função de t_a e substituir nosso resultado em função de t e isolá-lo.

$$d = \frac{1}{2}.a.t_a^2 + a.t_a.\frac{a}{f}.t_a - \frac{1}{2}.f.\left(\frac{a}{f}.t_a\right)^2 = \frac{1}{2}.a.t_a^2 + \frac{a^2}{f}.t_a^2 - \frac{1}{2}.\frac{a^2}{f}.t_a^2 = \frac{1}{2}.a.t_a^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{f}.t_a^2$$

Substituindo t_a:

$$2.d = \left(1 + \frac{a}{f}\right).a.\left(\frac{t.f}{f + a}\right)^2 = \frac{a.f}{a + f}.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.d(f + a)}{a.f}}$$

b Acelerando pouco, mantendo a velocidade constante e freando

Vamos seguir praticamente o mesmo passo a passo do item anterior. Agora temos $\Delta x_a + \Delta x_c + \Delta x_f = d$, e, consequentemente, $t_a + t_c + t_f = t$. O tempo desacelerando é dado pela mesma equação:

$$t_f = \frac{v_{o(f)}}{f}$$

Partindo do repouso, nossa velocidade $v_{0(f)}$ também é a mesma, obtendo assim:

$$t_f = \frac{a}{f}.t_a$$

Agora, da relação entre os tempos, obtemos:

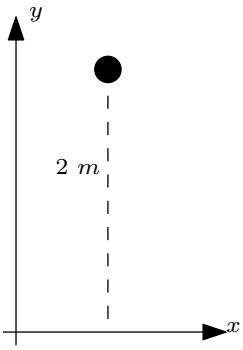
$$t_a = \frac{t - t_c}{1 + \frac{a}{f}} = \frac{(t - t_c).f}{f + a}$$

A relação dada pela velocidade média é:

$$v_m = \frac{d}{t} = \frac{\Delta x_a + \Delta x_c + \Delta x_f}{t_a + t_c + t_f} \Rightarrow d = \Delta x_a + \Delta x_c + \Delta x_f = \frac{1}{2}.a.t_a^2 + v_{0(f)}.t_c + v_{0(f)}.t_f - \frac{1}{2}.f.t_f^2$$

Se deixarmos em função de t_a e t_c, e substituirmos t_a verificaremos que este d dependerá do d do item (a) somado à vários termos que dependem de t_c que irão à zero quando t_c é zero (Verifique!!).

2.11 Malabarista



Se a bola vai até $y = 2\ m$, quer dizer que esta é a altura máxima (velocidade zero). Então, pela equação horária da posição na vertical, obtemos:

$$y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow \Delta y = 0.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2.\Delta y}{g}}$$

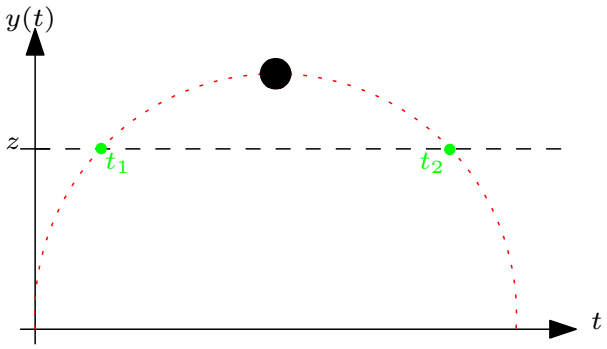
Com os dados, temos:

$$t = \sqrt{\frac{-2.(-2)}{9,8}} = \sqrt{\frac{2.2}{9,8}} = 0,64\ s$$

Pela equação horária da velocidade, obtemos:

$$v_y = v_{0y} - g.t = 0 - 9,8.\sqrt{\frac{2.2}{9,8}} \Rightarrow v_y = 6,3\ \frac{m}{s}$$

2.12 Descobrindo quanto vale a aceleração da gravidade



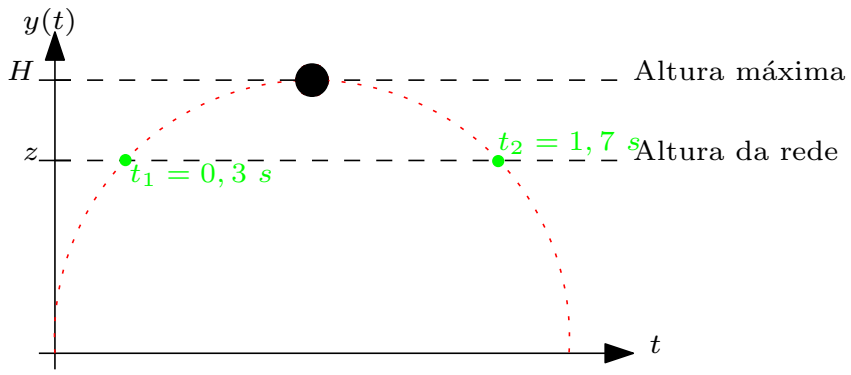
Pela equação horária da posição, se jogarmos uma bolinha para cima com velocidade v_0, os tempos em que ela passará pela altura z serão:

$$y - y_0 = z = v_0.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.g.t^2 - v_0.t + z = 0 \Rightarrow t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2.g.z}}{g} \begin{cases} t_1 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2.g.z}}{g} \\ t_2 = \frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2.g.z}}{g} \end{cases}$$

Vamos multiplicar estes dois resultados:

$$t_1.t_2 = \left(\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2.g.z}}{g}\right).\left(\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2.g.z}}{g}\right) = \frac{v_0^2 - (v_0^2 - 2.g.z)}{g^2} \Rightarrow g = \frac{2.z}{t_1.t_2}$$

2.13 Lançamento de uma bola de vôlei



a Velocidade inicial

A diferença de tempo entre t_1 e t_2 é $\Delta t = 1,4\ s$. Da altura z até a altura H e da altura H até a altura z é decorrido o mesmo intervalo de tempo t_d que é dado por:

$$2.t_d = \Delta t \Rightarrow t_d = \frac{\Delta t}{2} = \frac{1,4}{2} \Rightarrow t_d = 0,7\ s$$

Como a magnitude das velocidades devem ser iguais em pontos com mesma altura, vale que $v_1 = v_2$. Usando a equação horária da velocidade, obtemos:

$$v_1 = v_2 \Rightarrow v_0 - g.t_1 = g.t_d \Rightarrow v_0 = g.(t_1 + t_d) = 9,8.(0,3 + 0,7) \Rightarrow v_0 = 9,8\ \frac{m}{s}$$

b Altura máxima

O tempo total que a bola passa subindo é dado por $t_1 + t_d$ (que já vimos que é 1). Assim, usando a equação horária da posição, obtemos:

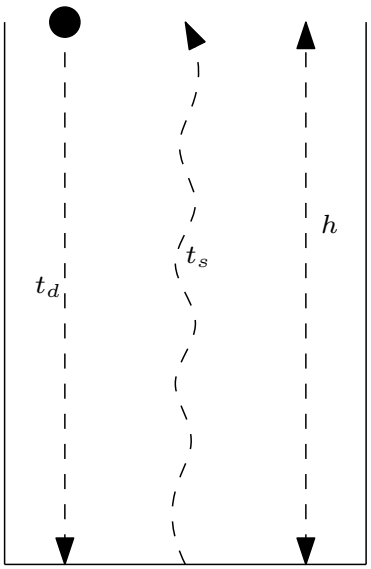
$$\Delta y = v_0.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow H = 9,8.1 - \frac{1}{2}.9,8.1^2 = 9,8 - \frac{1}{2}.9,8 \Rightarrow H = 4,9\ m$$

c Altura da rede

A altura da rede pode ser determinada pela equação desenvolvida na questão passada (isolando z) ou verificando quando vale a equação horária da posição em $t = t_1$. Farei da primeira forma:

$$g = \frac{2.z}{t_1.t_2} \Rightarrow z = \frac{t_1.t_2.g}{2} = \frac{0,3.1,7.9,8}{2} \Rightarrow z = 2,5\ m$$

2.14 Altura do buraco



Considerando que a pedra parte do repouso, o tempo que ela demora para chegar no fundo é dado pela equação horária da posição:

$$\Delta y = v_{0y}.t_d + \frac{1}{2}.g.t_d^2 = 0.t + \frac{1}{2}.g.t_d^2 \Rightarrow \Delta y = h = \frac{1}{2}.g.t_d^2$$

Ao chegar no fundo, ela bate no chão gerando um som. Sabemos a velocidade do som, logo podemos calcular o tempo que ele demora para chegar na superfície do buraco:

$$\Delta y = v_{som}.t_s \Rightarrow h = v_{som}.t_s$$

Sabemos que o tempo total é $t = 2\ s$, ou seja, a soma de t_d (tempo de descida) com t_s (tempo de subida) deve ser isto! Vamos igualar as alturas (a altura descendo deve ser a mesma da altura subindo) e deixar tudo em função de t_d:

$$\frac{1}{2}.g.t_d^2 = v_{som}.t_s = v_{som}.(t - t_d) = v_{som}.t - v_{som}.t_d \Rightarrow \frac{1}{2}.g.t_d^2 + v_{som}.t_d - v_{som}.t = 0$$

Resolvemos isto por Fórmula de Bháskara:

$$t_d = \frac{-v_{som} \pm \sqrt{v_{som}^2 + 2.g.v_{som}.t}}{g} = \frac{-330 \pm \sqrt{330^2 + 2.9,8.330.2}}{9,8} = \frac{-330 \pm 349,05}{9,8}$$

Como estamos medindo tempo absoluto, a solução negativa não tem sentido físico, apenas matemático[‡]. Com a solução positiva, obtemos:

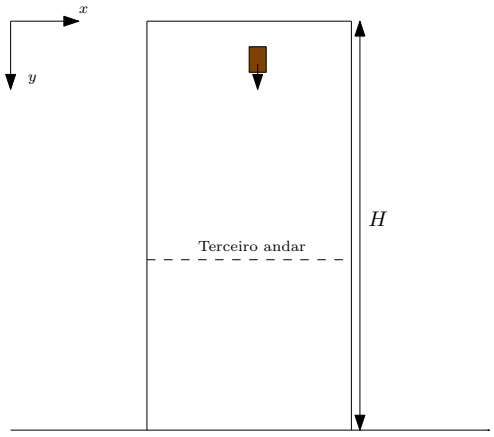
$$t_d = \frac{-330 + \sqrt{330^2 + 2.9,8.330.2}}{9,8} \Rightarrow t_d = 1,94\ s$$

O tempo de descida pode ser substituído na primeira equação obtida:

$$h = \frac{1}{2}.g.t_d^2 = \frac{1}{2}.9,8.\left(\frac{-330 + \sqrt{330^2 + 2.9,8.330.2}}{9,8}\right)^2 \Rightarrow h = 18,5\ m$$

[‡]Neste caso, a solução negativa apenas diz que para a variável t_d igual a este determinado valor menor que zero, a equação será zero, ou seja, este t_d é sua solução.

2.15 A queda do vaso de plantas



a Altura do edifício

Como sabemos a altura do terceiro andar e quando tempo, depois de passar pelo mesmo, ele atinge o chão, podemos usar a equação horária da posição para calcular a sua velocidade ao passar pelo terceiro andar:

$$\Delta y = v_{0y}.t + \frac{1}{2}.g.t^2$$

$$v_{0y} = \frac{\Delta y}{t} - \frac{1}{2}.g.t = \frac{20}{0,5} - \frac{1}{2}.9,8.0,5 \Rightarrow v_{0y} = 37,55\ \frac{m}{s}$$

b Altura do edifício

Como sabemos a altura do terceiro andar e quando tempo, depois de passar pelo mesmo, ele atinge o chão, podemos usar a equação horária da posição para calcular a sua velocidade ao passar pelo terceiro andar:

$$\Delta y = v_{0y}.t + \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow v_{0y} = \frac{\Delta y}{t} - \frac{1}{2}.g.t = \frac{20}{0,5} - \frac{1}{2}.9,8.0,5 \Rightarrow v_{0y} = 37,55\ \frac{m}{s}$$

Com base nisso, podemos usar a Equação de Torricelli para calcular quanto ele se deslocou até atingir esta velocidade. Como partimos no repouso, obtemos:

$$v_{0y}^2 = 2.g.\Delta y \Rightarrow \Delta y = \frac{v_{0y}^2}{2.g} = \frac{37,55^2}{2.9,8} \Rightarrow \Delta y = 72\ m$$

Porém, lembre que, ao atingir a velocidade v_{0y}, o vaso está passando pelo terceiro andar. Logo, a altura do prédio é:

$$H = 72 + 20 = 92\ m$$

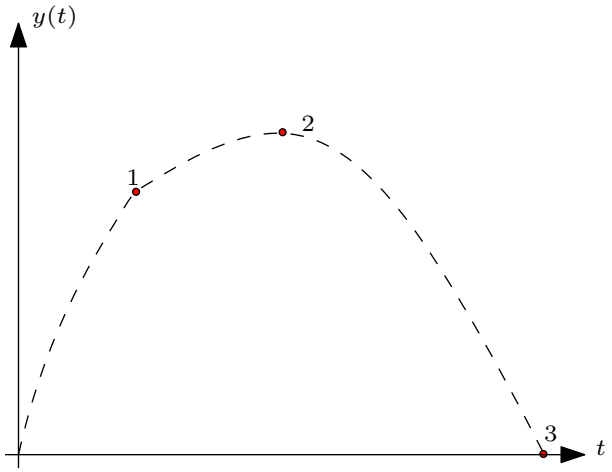
c Velocidade com que atinge o chão

Podemos usar Torricelli para determinar a velocidade ao atingir o chão, já que temos a altura H, esta é a forma mais simples[§]. Partindo do repouso, obtemos:

$$v_y^2 = 2.g.\Delta y \Rightarrow v_y = \sqrt{2.g.\Delta y} = \sqrt{2.9,8.92} \Rightarrow v_y = 42\ \frac{m}{s} = 153\ \frac{km}{h}$$

[§]Qual(is) a(s) outra(s)?

2.16 Lançamento de foguete



a Altitude máxima

Durante os primeiros 30 s, estamos acelerando contra a aceleração da gravidade. Com a equação horária da posição podemos saber quanto o foguete subiu nesse período de tempo:

$$\Delta y = h_1 = v_{0y}.t_1 + \frac{1}{2}.a_y.t_1^2 = 0.t_1 + \frac{1}{2}.1,5.g.t_1^2 = \frac{1}{2}.1,5.9,8.30^2 \Rightarrow h_1 = 6615\ m$$

A velocidade do foguete neste ponto pode ser calculada com a equação horária da velocidade:

$$v_1 = a_y.t_1 = 1,5.g.t_1 = 1,5.9,8.30 \Rightarrow v_1 = 441\ \frac{m}{s}$$

A partir daí, o foguete vai perdendo velocidade até chegar no ponto máximo (velocidade nula). Podemos descobrir a altura deste ponto com a equação de Torricelli, considerando a velocidade final como zero e a aceleração sendo apenas a gravitacional:

$$v_2^2 = v_1^2 - 2.g.\Delta y \Rightarrow 0^2 = v_1^2 - 2.g.(h_2 - h_1) = v_1^2 + 2.g.h_1 - 2.g.h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{v_1^2 + 2.g.h_1}{2.g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h_2 = \frac{441^2 + 2.9,8.6615}{2.9,8} \Rightarrow h_2 = 16,5.10^3\ m = 16,5\ km$$

b Velocidade ao atingir o solo e demora para chegar

A velocidade é determinada pela equação de Torricelli, já que sabemos a altura e que ele está inicialmente em repouso:

$$v_3^2 = v_2^2 + 2.g.\Delta y = 0^2 + 2.g.h_2 \Rightarrow v_3 = \sqrt{2.g.h_2} = \sqrt{2.g.\frac{441^2 + 2.9,8.6615}{2.9,8}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = 569\ \frac{m}{s} = 2050\ \frac{km}{h}$$

O tempo t_2 pode ser determinado usando a eqação horária da velocidade no intervalo 2, pois sabemos que este mesmo intervalo acaba quando a velocidade final for nula:

$$v_2 = 0 = v_1 - g.\Delta t = v_1 - g.(t_2 - t_1) = v_1 + g.t_1 - g.t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{v_1 + g.t_1}{g} = \frac{441 + 9,8.30}{9,8} = 75\ s$$

E o tempo t_3 pode ser determinado usando a equação horária da posição:

$$h_3 = 0 = h_2 + v_2.\Delta t - \frac{1}{2}.g.\Delta t^2 = h_2 + 0.(t_3 - t_2) - \frac{1}{2}.g.(t_3 - t_2)^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.g.(t_3 - t_2)^2 = h_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_3 - t_2)^2 = \frac{2.h_2}{g} \Rightarrow t_3 - t_2 = sqrt\frac{2.h_2}{g} \Rightarrow t_3 = t_2 + \sqrt{\frac{2.h_2}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_3 = 75 + \sqrt{\frac{441^2 + 2.9,8.6615}{9,8^2}} = 133\ s = 2,2\ min$$

2.17 Análise gráfica

a Traçando gráficos

Iremos definir 3 regiões, uma para cada comportamento distinto no gráfico de $v(t) \times t$.

Vamos calcular as funções $v(t)$ para cada região e depois integramos e derivamos para obter a posição e aceleração em função de t, respectivamente.

$$v_1(t) = \frac{12-0}{8-0}.t \Rightarrow v_1(t) = \frac{12}{8}.t = \frac{3}{2}.t$$

$$v_2(t) = \frac{-12-12}{12-8}.t + 60 = \frac{-24}{4}.t \Rightarrow v_2(t) = -6.t + 60$$

$$v_3(t) = -12$$

Com as funções velocidade já determinadas, podemos calcular suas respectivas derivadas e integrais[¶].

- Região 1

$$x_1(t) = \int v_1(t)\ dt = \int \frac{3}{2}.t\ dt \Rightarrow x_1(t) = \frac{3}{4}.t^2$$

$$a_1(t) = \frac{d\ v_1(t)}{dt} = \frac{d\ \frac{3}{2}.t}{dt} \Rightarrow a_1(t) = \frac{3}{2}$$

- Região 2

$$x_2(t) = \int v_2(t)\ dt = \int (-6.t + 60)\ dt \Rightarrow x_2(t) = -3.t^2 + 60.t - 240$$

$$a_2(t) = \frac{d\ v_2(t)}{dt} = \frac{d\ (-6.t)}{dt} \Rightarrow a_2(t) = -6$$

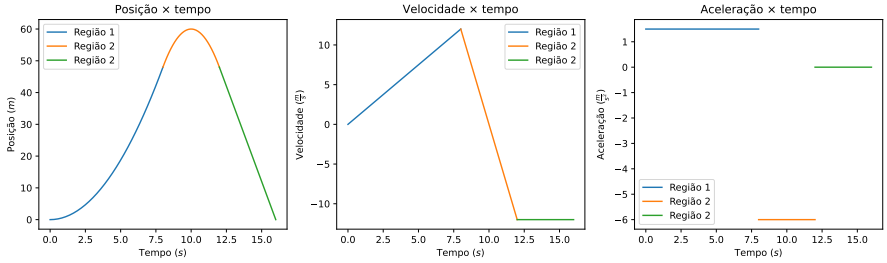
- Região 3

$$x_3(t) = \int v_3(t)\ dt = \int (-12)\ dt \Rightarrow x_3(t) = -12.t + 192$$

$$a_3(t) = \frac{d\ v_3(t)}{dt} = \frac{d\ (-12)}{dt} \Rightarrow a_3(t) = 0$$

Aplicando as funções para suas respectivas regiões, conseguimos desenhar os gráficos.

[¶]Em cada caso verifique o valor da constante de integração!



b Espaço percorrido

O espaço percorrido é dado pela soma dos módulos das integrais de velocidade no tempo em suas respectivas regiões. Como já calculamos as funções $x(t)$, temos apenas que avaliá-las nos limites de cada região.

- Região 1: de 0 à 8 segundos

$$\Delta x_1 = x_1(8) - x_1(0) = \frac{3}{4}.8^2 - \frac{3}{4}.0^2 \Rightarrow \Delta x_1 = 48\ m$$

- Região 2: de 8 à 12 segundos

  Aqui temos um caso muito singular. A trajetória descrita é tal que a posição inicial e final tem mesmo valor. Entaõ Δx será igual a zero. Então iremos calcular os limites indo até 10 s (onde $v_2(t)$ é zero) e multiplicaremos por dois, assim teremos o módulo da variação

$$\Delta x_2 = 2.(x_2(10) - x_2(8)) = 2.(-3.10^2 + 60.10 - 240 - (-3.8^2 + 60.8 - 240)) \Rightarrow \Delta x_2 = 24\ m$$

- Região 3: de 12 à 16 segundos:

$$\Delta x_3 = x_3(16) - x_3(12) = -12.16 + 192 - (-12.12 + 192) \Rightarrow \Delta x_3 = -48\ m$$

Então a distância d percorrida é:

$$d = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| + |\Delta x_3| = 48 + 24 + 48 \Rightarrow d = 120\ m$$

c Posição final

A posição final é a soma das variações da posição em cada região (valor real, sem módulo):

$$x_f = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 = 48 + 0 - 48 \Rightarrow x_f = 0\ m$$

Conseguimos verificar isso pelo gráfico feito!

2.18 Integral e Derivada

A integral definida é a área em baixo da curva limitada pela função $f(x)$ que está sendo integrada. No caso de

$$F(x) = \int_a^x f(x')\ dx'$$

Se $G(x')$ é a primitiva de $f(x')$, pelo Teorema Fundamental do cálculo, obtemos:

$$F(x) = G(x) - G(a)$$

Vamos calcular a derivada da função $F(x)$ agora:

$$\frac{d\ F(x)}{dx} = \frac{d\ (G(x) - G(a))}{dx} = \frac{d\ G(x)}{dx} - \frac{d\ G(a)}{dx}$$

Como $G(a)$ é constante com relação a x, teremos apenas:

$$\frac{d\ F(x)}{dx} = \frac{d\ G(x)}{dx}$$

Se $G(x')$ é uma primitiva de $f(x')$, então a derivada de $G(x)$ deve ser $f(x)$. Então finalmente obtemos:

$$\frac{d\ F(x)}{dx} = f(x)$$

2.19 Analisando foto estroboscópica

Podemos perceber que a diferença entre duas diferenças consecutivas é sempre 2 unidades, ou seja, se pegarmos a diferença entre o primeiro e segundo ponto, obtemos 1 unidade, se pegarmos a diferença entre o segundo e o terceiro ponto, temos 3 unidades, ou seja, a diferença entre essas diferenças é w unidades. De forma geral, isso pode ser expresso pela expressão:

$$\Delta y_n - \Delta y_{n-1} = 2$$

Escrevendo a equação horária da posição com estes índices, obtemos:

$$\Delta y_n = v_n.\Delta t + \frac{1}{2}.g.\Delta t^2$$

Vamos escrever a primeira equação em termos da segunda:

$$v_n.\Delta t + \frac{1}{2}.g.\Delta t^2 - (v_{n-1}.\Delta t + \frac{1}{2}.g.\Delta t^2) = 2 \Rightarrow v_n.\Delta t - v_{n-1}.\Delta t = 2 \Rightarrow \Delta t = \frac{2}{v_n - v_{n-1}}$$

Como v_1 é zero, é conveniente escolhermos $n = 2$:

$$\Delta t = \frac{2}{v_2 - v_{2-1}} = \frac{2}{v_2}$$

v_2 é a velocidade inicial ao sair do segundo ponto e ir ao terceiro. Pela equação de Torricelli, isto é:

$$v_2^2 = v_1^2 + 2.g.\Delta y_1 = 0^2 + 2.9,8.1 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2.9,8.1} = 4,4\ s$$

Logo:

$$\Delta t = \frac{2}{\sqrt{2.9,8.1}} = 0,45\ s$$

A cada $0,45\ s$ o equipamento tira uma foto.

CAPÍTULO

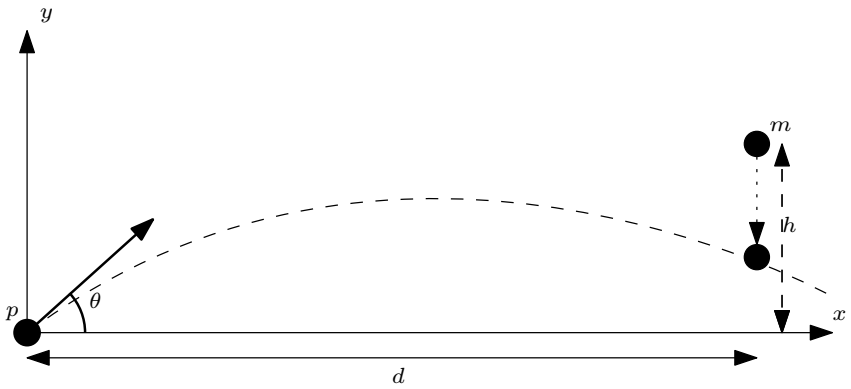
3

MOVIMENTO BIDIMENSIONAL

"O universo não parece nem benigno nem hostil, meramente indiferente. A importância que damos à nossa vida, aos nossos ideais e sofrimentos, é inteiramente nossa. O homem deve lutar por sua própria vida e criar seu próprio significado."

Carl Sagan

3.1 Caçando um macaco



Ao ver o brilho da luneta, o macaco se joga do galho de h. Sua altura (índice m) em função do tempo é:

$$y_m(t) = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 = h - 0.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow y_m(t) = h - \frac{1}{2}.g.t^2$$

Sabendo que a distância horizontal entre o caçador e o macaco é d, podemos calcular o tempo que o projétil leva até chegar à mesma posição horizontal do macaco:

$$x_p(t) = x_{0p}(t) + v_{px}.t = 0 + v_0.cos(\theta).t \Rightarrow d = v_0.cos(\theta).t \Rightarrow t = \frac{d}{v_0.cos(\theta)}$$

Neste tempo, a posição vertical do macaco é:

$$y_m(t_1) = h - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right)^2$$

Para que o projétil atinja o macaco, as posições verticais de ambos também devem ser a mesma. Então vamos igualar a posição vertical do projétil com a do macaco:

$$y_p(t) = y_m(t) \Rightarrow v_{0y}.\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right)^2 = h - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_0.sen(\theta).\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right)^2 = h - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{d}{v_0.cos(\theta)}\right)^2 \Rightarrow d.tg(\theta) = h$$

Assim provamos que:

$$tg(\theta) = \frac{h}{d}$$

$$sen(\theta) = \frac{h}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

$$cos(\theta) = \frac{d}{\sqrt{h^2 + d^2}}$$

Podemos substituir o valor do cosseno na equação do tempo, obtendo:

$$t = \frac{d}{v_0 . \frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}} = \frac{\sqrt{h^2 + d^2}}{v_0}$$

3.2 Deslocamento de avião

a Vetor deslocamento total

Podemos descobrir o vetor resultante decompondo o deslocamento nas direções x^* e $y^\dagger$.

- Voando para o Norte de Brasília à Belém

$$\vec{r}_1 = 1630\ \hat{j}$$

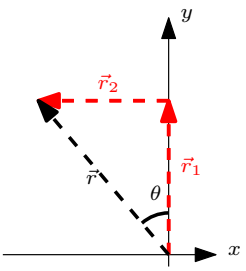
- Voando para Oeste até Manaus

$$\vec{r}_2 = -1290\ \hat{i}$$

O vetor deslocamento total é simplesmente a soma dos vetores deslocamento intermediários:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 = 1630\ \hat{j} - 1290\hat{i} \Rightarrow \vec{r} = -1290\ \hat{i} + 1630\ \vec{j}$$

Graficamente, podemos usar a regra do paralelogramo para determinar o vetor:



O ângulo θ pode ser calculado usando trigonometria:

$$tg(\theta) = \frac{r_2}{r_1} = \frac{1290}{1630} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{1290}{1630}\right) = 38,4°$$

E o módulo de $\vec{r}$ é calculado com teorema de pitágoras:

$$r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} = \sqrt{1630^2 + 1290^2} \Rightarrow r = 2079\ km$$

Então o avião estará a 2079 km da origem formando um ângulo de $38,4°$ entre o Norte e o Oeste.

b Vetor velocidade média de Brasília à Belém

O percurso levou $2h\ 10min$, ou seja, $2 + \frac{10}{60}\ h = \frac{13}{6}\ h$.
Aplicando a definição de velocidade média:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_1 - 0}{\Delta t} = \frac{1630\ \hat{j}}{\frac{13}{6}} \Rightarrow \vec{v}_m = 752\ \hat{j}$$

(em $\frac{km}{h}$)

*Sendo $-x$ oeste e $+x$ leste
†Sendo $-y$ sul e $+y$ norte

c Vetor velocidade média de Brasília à Manaus

O percurso levou $2h\ 50min$, ou seja, $2 + \frac{50}{60}\ h = \frac{17}{6}\ h$.
Aplicando a definição de velocidade média:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t} = \frac{-1290\ \hat{i} - 1630\ \hat{j}}{\frac{17}{6}} \Rightarrow \vec{v}_m = -455\ \hat{i} - 575\ \hat{j}$$

(em $\frac{km}{h}$)

3.3 A desigualdade triangular

Vamos considerar vetores bi-dimensionais por fins de simplificação, mas a equação continua verdadeira para vetores em 3 dimensões.

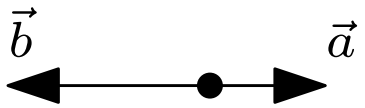
O quadrado do módulo da soma é:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+2.\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2.|\vec{a}|.|\vec{b}|.cos(\theta)$$

Sendo θ o menor ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

- Caso de mínimo

  Neste caso, os vetores a e b são antiparalelos, ou seja:



  Por conta disso:

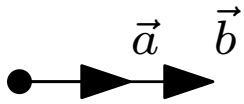
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a.b.cos(180^\circ)=-a.b$$

  E a soma (que tem o valor mínimo), será:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2_{min}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2.|\vec{a}|.|\vec{b}|=(|\vec{a}|-|\vec{b}|)^2\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|_{min}=||\vec{a}|-|\vec{b}||$$

- Caso máximo

  Neste caso, os vetores são paralelos, ou seja:



  Por conta disso:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a.b.cos(0^\circ)=a.b$$

  E a soma (que tem o valor máximo), será:

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2_{max}=|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2.|\vec{a}|.|\vec{b}|=(|\vec{a}|+|\vec{b}|)^2\Rightarrow|\vec{a}+\vec{b}|_{max}=||\vec{a}|+|\vec{b}||=|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

Assim fica prova que:

$$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leq|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$$

3.4 Ângulo entre vetores

Vamos resolver o problema considerando $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como vetores bidimensionais, apenas para simplificar as contas[‡]. Os vetores são do tipo:

$$\vec{a} = a_x\ \hat{i} + a_y\ \hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x\ \hat{i} + b_y\ \hat{j}$$

Lembrando que $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Os vetores soma e subtração serão, respectivamente, os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\ \hat{i} + (a_y + b_y)\ \hat{j}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\ \hat{i} + (a_y - b_y)\ \hat{j}$$

Como queremos o ângulo entre os vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ é conveniente escrever o produto escalar entre eles, já que aparecerá o $cos(\theta)$:

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = [(a_x + b_x)\ \hat{i} + (a_y + b_y)\ \hat{j}] \cdot [(a_x - b_x)\ \hat{i} + (a_y - b_y)\ \hat{j}] = |\vec{c}|.|\vec{d}|.cos(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos(\theta) = \frac{[(a_x + b_x)\ \hat{i} + (a_y + b_y)\ \hat{j}] \cdot [(a_x - b_x)\ \hat{i} + (a_y - b_y)\ \hat{j}]}{|\vec{c}|.|\vec{d}|}$$

Vamos tratar o numerador e denominador separadamente. O numerador é:

$$[(a_x+b_x)\ \hat{i}+(a_y+b_y)\ \hat{j}]\cdot[(a_x-b_x)\ \hat{i}+(a_y-b_y)\ \hat{j}] = (a_x+b_x).(a_x-b_x)+(a_y+b_y).(a_y-b_y) =$$

$$= a_x^2 - b_x^2 + a_y^2 - b_y^2 = (a_x^2 + a_y^2) - (b_x^2 + b_y^2) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

Como os módulos dos vetores são iguais concluímos que:

$$[(a_x + b_x)\ \hat{i} + (a_y + b_y)\ \hat{j}] \cdot [(a_x - b_x)\ \hat{i} + (a_y - b_y)\ \hat{j}] = 0$$

Como o produto dos módulos dos vetores $\vec{c}$ e $\vec{d}$ é não-nulo, obtemos:

$$cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = arccos(0) = 90^\circ$$

[‡]Caso queira, resolva para 3 dimensões para verificar!

3.5 Usando coordenadas geográficas

Este problema foge bastante do comum, temos que lembrar algumas coisas especificas.

Um ângulo pode ser escrito como $m^\circ + n' + o''$, sendo, respectivamente, os graus, minutos e segundos, e m, n e o, são valores inteiros. 60 minutos equivalem a 1 grau e, naturalmente, 60 segundos equivalem a 1 minuto. Aqui não precisaremos trabalhar com segundos.

Como sabemos, 1° equivale a $\frac{\pi}{180}$ rad. Pela definição de radianos, e considerando o raio da Terra como 6378 km, obtemos que andar angularmente 1° na superfície terrestre equivale a se deslocar:

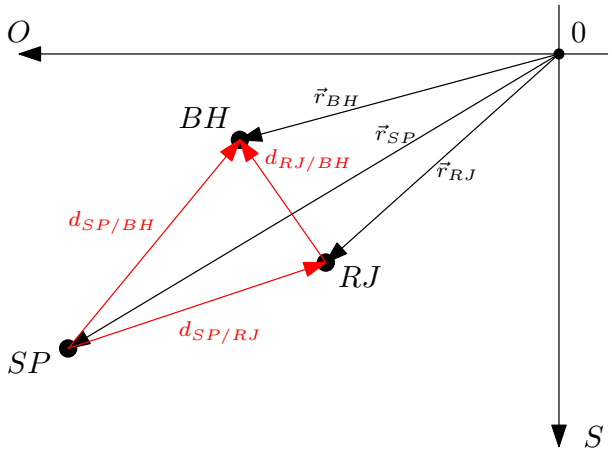
$$\Delta r = R_T.\Delta\theta = 6378.\frac{\pi}{180} = 111\ km$$

Portanto, cada grau vale 111 km deslocado na superfície terrestre.

Como, comparado ao tamanho do Mundo, a distância entre as cidades é curta, podemos considerar que a superfície da Terra é plana (**NÃO É**), então podemos calcular a distância entre elas com vetores no plano.

a Calculando as distâncias entre as três cidades

A Latitude diz quanto ao Sul da linha do Equador o local está, e a longitude diz quanto à esquerda da linha de Greenwich o local está. Colocando isso em um plano, obtemos o seguinte:



Podemos calcular as distâncias com a Geometria Analítica[§] de sempre.

- Distância SP-RJ

  Pela Figura, temos:

$$d_{SP/RJ} = \sqrt{(O_{RJ} - O_{SP})^2 + (S_{RJ} - S_{SP})^2} = \sqrt{(43^\circ\ 17' - 46^\circ\ 39')^2 + (22^\circ\ 53' - 23^\circ\ 33')^2} \Rightarrow$$

[§]A distância entre dois pontos (x_0, y_0) e (x_1, y_1) é $\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}$

$$\Rightarrow d_{SP/RJ} = \sqrt{(-3^\circ\ 22')^2 + (-40')^2}$$

Agora transformamos os minutos em graus, obtendo:

$$d_{SP/RJ} = \sqrt{(-3,367^\circ)^2 + (0,667^\circ)^2}$$

Com os graus, podemos converter o valor para km com a relação desenvolvida anteriormente:

$$d_{SP/RJ} = \sqrt{(-3,367.111)^2 + (0,667.111)^2} = 381\ km$$

- Distância SP-BH

  Para a distância de SP à BH, faremos o mesmo passo a passo:

$$d_{SP/BH} = \sqrt{(O_{BH} - O_{SP})^2 + (S_{BH} - S_{SP})^2} = \sqrt{(43^\circ\ 56' - 46^\circ\ 39')^2 + (19^\circ\ 55' - 23^\circ\ 33')^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{SP/BH} = \sqrt{(-2^\circ\ 43')^2 + (-3^\circ\ 38')^2}$$

  Convertendo tudo em graus:

$$\Rightarrow d_{SP/BH} = \sqrt{(-2,717^\circ)^2 + (-3,633^\circ)^2}$$

  Convertendo para km, obtemos a distância:

$$\Rightarrow d_{SP/BH} = \sqrt{(-2,717.111)^2 + (-3,633.111)^2} = 504\ km$$

- Distância RJ-BH

  Novamente, seguiremos os mesmos passos dos dois cálculos anteriores.

$$d_{RJ/BH} = \sqrt{(O_{BH} - O_{RJ})^2 + (S_{BH} - S_{RJ})^2} = \sqrt{(43^\circ\ 56' - 43^\circ\ 17')^2 + (19^\circ\ 55' - 22^\circ\ 53')^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{RJ/BH} = \sqrt{(39')^2 + (-2^\circ\ 58')^2}$$

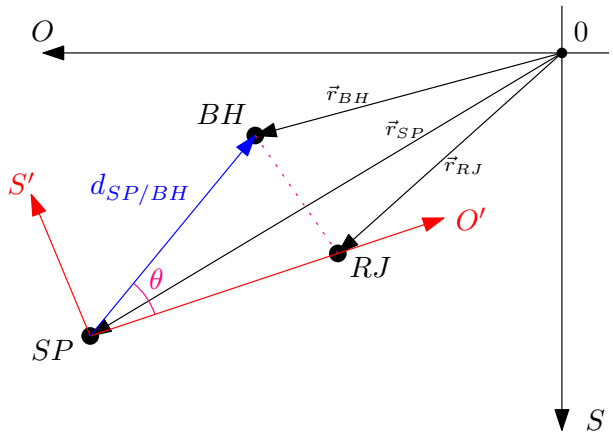
  Convertendo para graus:

$$\Rightarrow d_{RJ/BH} = \sqrt{(0,650^\circ)^2 + (-2,967^\circ)^2}$$

  Convertendo, finalmente, para km, obtemos:

$$\Rightarrow d_{RJ/BH} = \sqrt{(0,650.111)^2 + (-2,967.111)^2} = 337\ km$$

b Vetor posição de Belo Horizonte



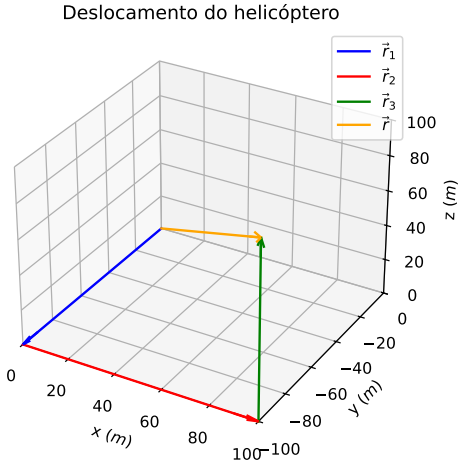
Sabemos as distâncias entre as cidades, e consequentemente os vetores de distância. Com isso, pela Lei dos Cossenos, podemos descobrir quanto vale o ângulo θ:

$$d^2_{RJ/BH} = d^2_{SP/RJ} + d^2_{SP/BH} - 2.d_{SP/RJ}.d_{SP/BH}.cos(\theta) \Rightarrow cos(\theta) = \frac{d^2_{SP/RJ} + d^2_{SP/BH} - d^2_{RJ/BH}}{2.d_{SP/RJ}.d_{SP/BH}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{d^2_{SP/RJ} + d^2_{SP/BH} - d^2_{RJ/BH}}{2.d_{SP/RJ}.d_{SP/BH}}\right) = arccos\left(\frac{381^2 + 504^2 - 337^2}{2.381.504}\right) = 42°$$

Em relação ao eixo de coordenadas com linha, a cidade de Belo Horizonte está distante 504 km da origem (distância São Paulo - Belo Horizonte), formando um ângulo de 42° com a direção O', que é a direção que liga São Paulo e Rio de Janeiro.

3.6 Decolagem de um helicóptero



No geral: $-x$ e $+x$ são Oeste e Leste, respectivamente. $-y$ e $+y$ são Sul e Norte, respectivamente. $-z$ e $+z$ são abaixo e acima da altura do hangar.

a Magnitude do deslocamento

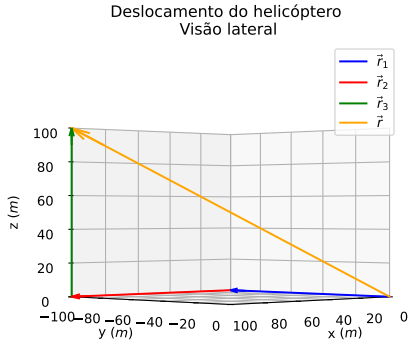
O vetor deslocamento total é dado pela soma dos vetores deslocamento:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3 = -100\ \hat{j} + 100\ \hat{i} + 100\ \hat{k}$$

Seu módulo (magnitude) é:

$$|\vec{r}| = \sqrt{t_x^2 + r_y^2 + r_z^2} = \sqrt{100^2 + 100^2 + 100^2} \Rightarrow |\vec{r}| = 173\ m$$

b Ângulo que o helicóptero (no ar) faz com o solo



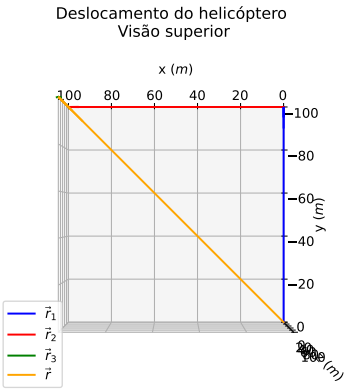
O ângulo entre o vetor deslocamento e o solo pode ser calculado simplesmente pela Trigonometria:

$$sen(\varphi) = \frac{r_3}{r}$$

$$\varphi = arcsen\left(\frac{r_3}{r}\right) = arcsen\left(\frac{100}{\sqrt{100^2 + 100^2 + 100^2}}\right)$$

$$\varphi = 35,3^\circ$$

c Direção do vetor deslocamento



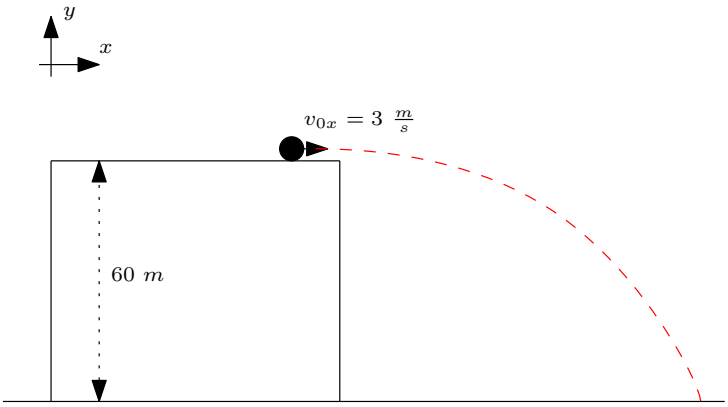
A direção em que o vetor $\vec{r}$ aponta é dada também pela Trigonometria:

$$tg(\gamma) = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \gamma = arctg\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = arctg\left(\frac{100}{100}\right)$$

$$\gamma = arctg(1) = 45°$$

45° na direção positiva de x e negativa de y, ou seja, sudeste (SE).

3.7 Pedra empurrada por enxurrada



Sabemos a altura inicial da pedra e sabemos que ela parte do repouso (na vertical). Então podemos calcular o tempo t de queda com a equação horária da posição vertical:

$$y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 = y_0 + 0.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow -\frac{1}{2}.g.t^2 = \Delta y \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2.\Delta y}{g}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2.(-60)}{9,8}} = 3,5\ s$$

Com a equação horária da posição horizontal, podemos descobrir o ponto em que a pedra encosta no chão:

$$x = x_0 + v_{0x}.t = 0 + 3.\sqrt{\frac{-2.(-60)}{9,8}} = 10,5\ m$$

E a velocidade final é a composição da velocidade horizontal (constante) com a vertical (varia com o tempo). A velocidade vertical é dada por:

$$v_y = v_{0y} - g.t = 0 - 9,8.\sqrt{\frac{-2.(-60)}{9,8}} = -34,3\ \frac{m}{s}$$

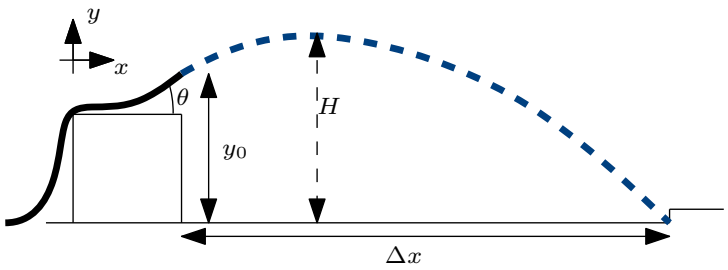
Então o vetor velocidade é:

$$\vec{v} = 3\ \hat{i} - 34,3\ \hat{j}$$

E sua magnitude é:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{3^2 + 34,3^2} = 34,4\ \frac{m}{s} = 124\ \frac{km}{h}$$

3.8 Água saindo de uma mangueira



a Velocidade do jato de água

Com a equação horária da posição em x podemos isolar o tempo t que a água demora para chegar à mesma posição horizontal do canteiro:

$$x = x_0 + v_{0x}.t = 0 + v_0.cos(\theta).t \Rightarrow t = \frac{x_c}{v_0.cos(\theta)}$$

Aplicando este tempo à equação horária da posição em y, obtemos:

$$y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow \Delta y = v_0.sen(\theta).\frac{x_c}{v_0.cos(\theta)} - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x_c}{v_0.cos(\theta)}\right)^2 = x_c.tg(\theta) - \frac{1}{v_0^2}.\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x_c}{cos(\theta)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{v_0^2}.\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x_c}{cos(\theta)}\right)^2 = x_c.tg(\theta) - \Delta y \Rightarrow v_0^2 = \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x_c}{cos(\theta)}\right)^2.\frac{1}{x_c.tg(\theta) - \Delta y}$$

Portanto, concluímos que:

$$v_0 = \frac{x_c}{cos(\theta)}.\sqrt{\frac{g}{2.(x_c.tg(\theta) - \Delta y)}} = \frac{15}{cos(30°)}.\sqrt{\frac{9,8}{2.(15.tg(30°) - (-1,5))}} = 12\ \frac{m}{s}$$

b Altura atingida pelo jato

Com a velocidade inicial, podemos saber quanto tempo leva para que a velocidade vertical seja zero (ponto de máximo). Com a equação horária da velocidade, temos:

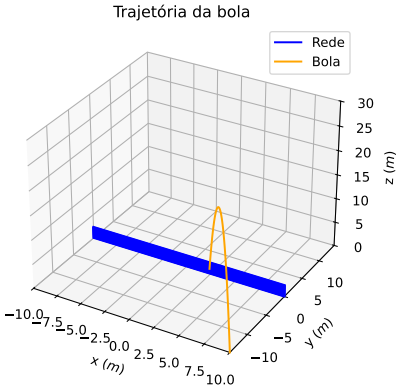
$$v_y = 0 = v_{0y} - g.t_s = v_0.sen(\theta) - g.t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0.sen(\theta)}{g} = \frac{12.sen(30°)}{9,8} = 0,61\ s$$

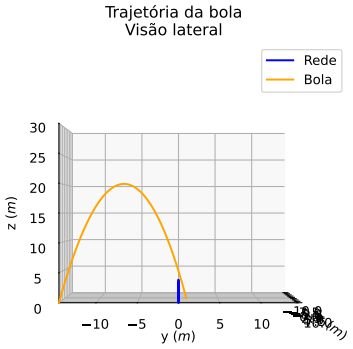
Usando a equação horária da posição em y, para $\Delta t = t_s$, encontramos:

$$y = H = y_0 + v_{0y}.t_s - \frac{1}{2}.g.t_s^2 = y_0 + v_0.sen(\theta).t_s - \frac{1}{2}.g.t_s^2 = 1,5 + 12.sen(30°).0,61 - \frac{1}{2}.9,8.0,61^2$$

$$H = 3,34\ m$$

3.9 Saque em um jogo de vôlei





a Ângulo de lançamento

Aplicando a equação de Torricelli na direção vertical no ponto de máximo da bola, obtemos:

$$v_y^2 = 0 = v_{0y}^2 - 2.g.\Delta y = v_0^2.sen^2(\theta) - 2.g.H \Rightarrow v_0^2 = \frac{2.g.H}{sen^2(\theta)}$$

O tempo que leva para isto acontecer (chegar ao máximo) é dado pela equação horária da velocidade na vertical:

$$v_y = 0 = v_{0y} - g.t_s = v_0.sen(\theta) - g.t_s \Rightarrow t_s = \frac{v_0.sen(\theta)}{g}$$

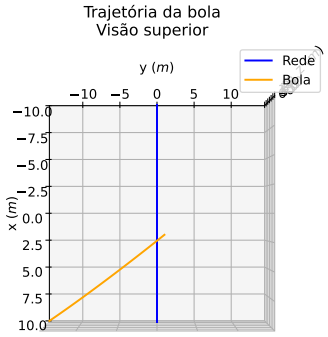
Multiplicando este resultado por 2, temos o tempo total t decorrido até a bola tocar no chão. Com isso, podemos calcular o alcance da bola com a equação horária da posição horizontal:

$$x = A = x_0 + v_{0x}.t = 0 + v_0.cos(\theta).2.\frac{v_0.sen(\theta)}{g} = \frac{v_0^2}{g}.2.sen(\theta).cos(\theta) \Rightarrow A = \frac{v_0^2}{g}.2.sen(\theta).cos(\theta)$$

Substituindo o valor encontrado para v_0^2:

$$A = \frac{\frac{2.g.H}{sen^2(\theta)}}{g}.2.sen(\theta).cos(\theta) = \frac{4.H}{tg(\theta)} \Rightarrow tg(\theta) = \frac{4.H}{A} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{4.H}{A}\right)$$

O alcance A pode ser calculado pelo Teorema de Pitágoras:



$$A^2 = 15,5^2+8^2 \Rightarrow A = \sqrt{15,5^2+8^2} = 17,4\,m$$

Logo:

$$\theta = arctg\left(\frac{4.20}{17,4}\right) = 77,7°$$

b Velocidade ao atingir a altura do lançamento

A velocidade ao atingir a altura de lançamento é a mesma que no lançamento (em módulo). Por conta disso, podemos usar a equação desenvolvida para v_0:

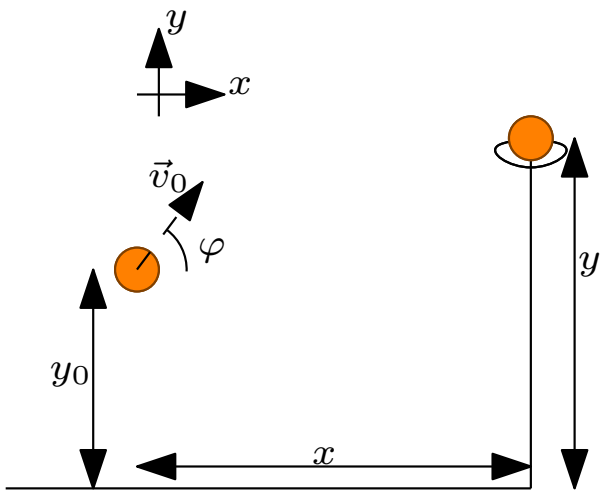
$$v_0^2 = \frac{2.g.H}{sen^2(\theta)} \Rightarrow v_0 = \sqrt{\frac{2.g.H}{sen^2(\theta)}} = \sqrt{\frac{2.9,8.20}{sen^2(77,7°)}} = 20,3\ \frac{m}{s} = 73\ \frac{km}{h}$$

c Tempo decorrido

O tempo total é o dobro do tempo de subida t_s:

$$t = 2.t_s = 2.\frac{v_0.sen(\theta)}{g} = 2.\frac{20,3.sen(77,7°)}{9,8} = 4\ s$$

3.10 Laçamento de bola de basquete



Para o movimento horizontal da bola, podemos isolar o tempo que a mesma leva para chegar até a posição correta da cesta:

$$x = x_0 + v_{0x}.\Delta t = 0 + v_0.cos(\varphi).t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0.cos(\varphi)}$$

Para o movimento horizontal da bola, podemos isolar o tempo que a mesma leva para chegar até a posição correta da cesta:

$$x = x_0 + v_{0x}.\Delta t = 0 + v_0.cos(\varphi).t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0.cos(\varphi)}$$

Para o movimento vertical, temos:

$$y = y_0 + v_{0y}.\Delta t - \frac{1}{2}.g.\Delta t^2 = y_0 + v_0.sen(\varphi).t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow \Delta y = v_0.sen(\varphi).t - \frac{1}{2}.g.t^2$$

Substituindo o tempo obtido inicialmente na equação horária da posição vertical:

$$\Delta y = v_0.sen(\varphi).\left(\frac{x}{v_0.cos(\varphi)}\right) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.cos(\varphi)}\right)^2 = x.tg(\varphi) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.sec^2(\varphi)$$

Existe uma relação interessante entre a $sec^2(\varphi)$[¶] e $tg^2(\varphi)$. Ela é deduzida a partir da Equação Fundamental da Trigonometria:

$$sec^2(\varphi) = \frac{1}{cos^2(\varphi)} = \frac{sen^2(\varphi) + cos^2(\varphi)}{cos^2(\varphi)} = \frac{sen^2(\varphi)}{cos^2(\varphi)} + \frac{cos^2(\varphi)}{cos^2(\varphi)} = tg^2(\varphi) + 1 \Rightarrow sec^2(\varphi) = tg^2(\varphi) + 1$$

Então, substituindo a $sec^2(\varphi)$ por $tg^2(\varphi) + 1$, obtemos uma equação do segundo grau em $tg(\varphi)$:

$$\Delta y = x.tg(\varphi) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.(tg^2(\varphi) + 1) = x.tg(\varphi) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.tg^2(\varphi) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.tg^2(\varphi) - x.tg(\varphi) + \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + \Delta y = 0$$

[¶]Lembre que $sec^2(\varphi) = \frac{1}{cos^2(\varphi)}$

Usando Bháskara, obtemos:

$$tg(\varphi) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + \Delta y\right)}}{g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2}$$

$$= \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 2.9,8.\left(\frac{3}{7}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.9,8.\left(\frac{3}{7}\right)^2 + (3,05 - 2)\right)}}{9,8.\left(\frac{3}{7}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow tg(\varphi) = \frac{3 \pm 1,4}{1,8} \Rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{3 \pm 1,4}{1,8}\right) \begin{cases} \varphi_1 = arctg\left(\frac{3+1,4}{1,8}\right) = 67,8^\circ \\ \varphi_2 = arctg\left(\frac{3-1,4}{1,8}\right) = 41,6^\circ \end{cases}$$

Neste caso, a resposta que fisicamente faz sentido é φ_1[‖].

[‖]Se queremos fazer o ponto, temos que lançar a bola de tal forma que ela chegue o mais verticalmente possível sobre a cesta. A solução φ_2 está matematicamente correta, mas nesta situação a bola bateria no aro da cesta, fazendo com que o ponto não fosse feito.

3.11 O resultado de Galileu

Lembre que o Alcance é dado por**:

$$A = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\theta)$$

Troquemos θ por $45° \pm \delta$. Obtemos:

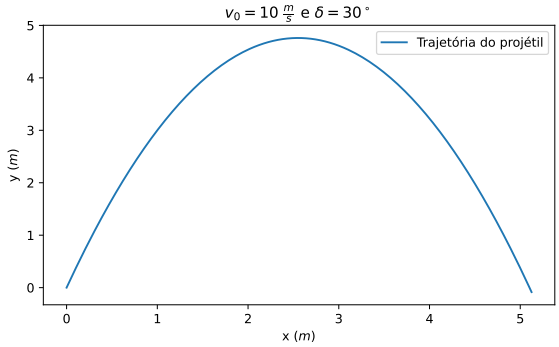
$$A = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.(45°\pm\delta)) = \frac{v_0^2}{g}.sen(90°\pm2.\delta) = \frac{v_0^2}{g}.(sen(90°).cos(2.\delta)\pm cos(90°).sen(2.\delta)) \Rightarrow$$

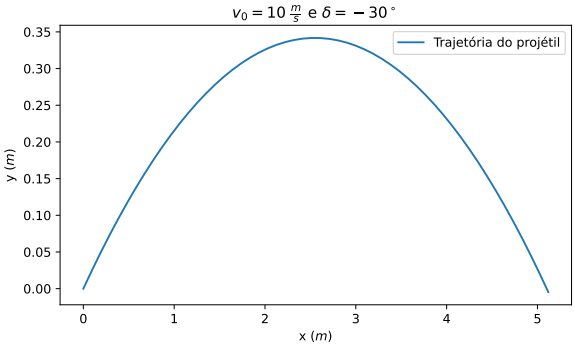
$$\Rightarrow A = \frac{v_0^2}{g}.(1.cos(2.\delta) \pm 0.sen(2.\delta))$$

Como o termo na direita do $\pm$ é nulo, fica provado que o alcance é o mesmo, não importa se somamos ou subtraímos δ de 45°.

Para descobrir δ, podemos isolá-lo da equação obtida anteriormente:

$$A = \frac{v_0^2}{g}.cos(2.\delta) \Rightarrow cos(2.\delta) = \frac{A.g}{v_0^2} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}.arccos\left(\frac{A.g}{v_0^2}\right)$$





Observe que o alcance A é o mesmo, mas os máximos verticais são diferentes!

**Provado no item (a) do Problema 3.9.

3.12 Generalização do problema anterior

Como o alcance é

$$A = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\theta)$$

o alcance máximo ocorre para $\theta = 45°$:

$$A_m = \frac{v_0^2}{g}$$

Para atingir a posição x, o projétil demora o seguinte tempo:

$$x = x_0 + v_{0x}.t = 0 + v_0.cos(\theta).t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0.cos(\theta)}$$

Podemos substituir este tempo t na equação horária da posição na vertical:

$$y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 = 0 + v_0.sen(\theta).t - \frac{1}{2}.g.t^2 = v_0.sen(\theta).\frac{x}{v_0.cos(\theta)} - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0.cos(\theta)}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = x.tg(\theta) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.sec^2(\theta) = x.tg(\theta) - \frac{x^2}{2.A_m}.sec^2(\theta)$$

Usando a relação $sec^2(\theta) = 1 + tg^2(\theta)$, obtemos uma equação quadrática em $tg(\theta)$:

$$y = x.tg(\theta) - \frac{x^2}{2.A_m}.(1 + tg^2(\theta)) = x.tg(\theta) - \frac{x^2}{2.A_m} - \frac{x^2}{2.A_m}.tg^2(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2.A_m}.tg^2(\theta) - x.tg(\theta) + \frac{x^2}{2.A_m} + y = 0$$

Usando a Fórmula de Bháskara, provamos que há dois ângulos distintos que fazem com que o projétil chegue no ponto (x, y):

$$tg(\theta) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2.\frac{x^2}{A_m}.\left(\frac{x^2}{2.A_m} + y\right)}}{\frac{x^2}{A_m}}$$

Assim, mostramos que a posição final é atingida por dois ângulos de lançamento distintos.

Lembre que a solução da equação do segundo grau é do tipo:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$$

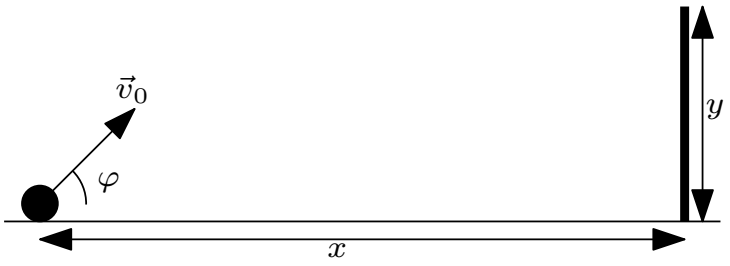
Ou seja, só teremos duas soluções se nosso Δ for diferente de zero. Surge, daí, um limite! Vamos aplicar está condição:

$$\Delta = 0 \Rightarrow x^2 - 2.\frac{x^2}{A_m}.\left(\frac{x^2}{2.A_m} + y\right) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{2}{A_m}.\left(\frac{x^2}{2.A_m} + y\right) = 0 \Rightarrow \frac{2}{A_m}.\left(\frac{x^2}{2.A_m} + y\right) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2.A_m} + y = \frac{A_m}{2} \Rightarrow y = \frac{A_m}{2} - \frac{x^2}{2.A_m} \Rightarrow y = \frac{1}{2}.\left(A_m - \frac{x^2}{A_m}\right)$$

Ou seja, se quisermos ter duas raízes para a função $tg(\theta)$, nosso ponto (x, y) deve estar ACIMA dessa parábola, por isso a mesma recebe o nome de parábola de segurança.

3.13 Batida de pênalti



a Distância máxima do apanhador

Considerando que a bola passa tangente à trave superior podemos calcular o ângulo de lançamento necessário para isso. Se voltar na resolução do Problema 3.10, verá a prova que há dois ângulos possíveis para chegar em (x, y) (nesse caso, as coordenadas da trave superior), e eles são:

$$tg(\varphi) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + \Delta y\right)}}{g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 2.9,8.\left(\frac{9}{15}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.9,8.\left(\frac{9}{15}\right)^2 + 2,4\right)}}{9,8.\left(\frac{9}{15}\right)^2}$$

A solução positiva e negativa, respectivamente, são:

$$\varphi_1 = 73^\circ$$

$$\varphi_2 = 27^\circ$$

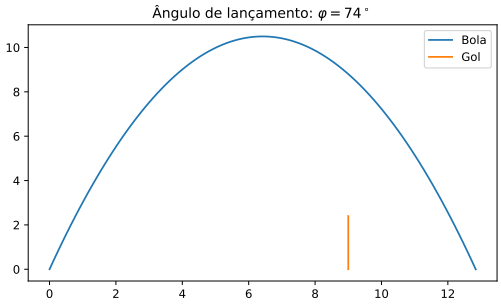
Usando a equação para o alcance, obtemos os seguintes alcances para cada ângulo:

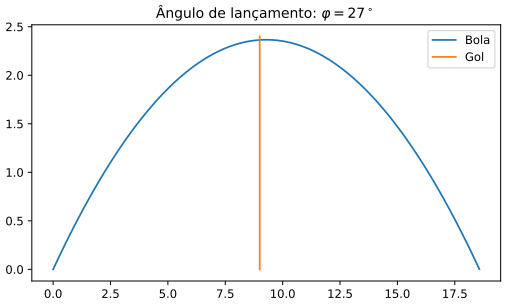
$$A_1 = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\varphi_1) = \frac{15^2}{9,8}.sen(2.73^\circ) = 12,84\ m$$

$$A_2 = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\varphi_2) = \frac{15^2}{9,8}.sen(2.27^\circ) = 18,57\ m$$

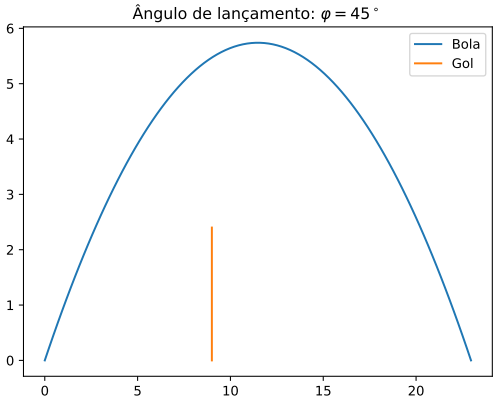
Então, a distância máxima é dada pelo ângulo φ_2. Lembre que queremos a distância que o apanhador deve ficar de gol. Logo, devemos subtrair a distância do jogador ao gol do resultado. Sendo assim:

$$D = A_2 - 9 = 18,57 - 9 = 9,57\ m$$





b Distância mínima da plateia



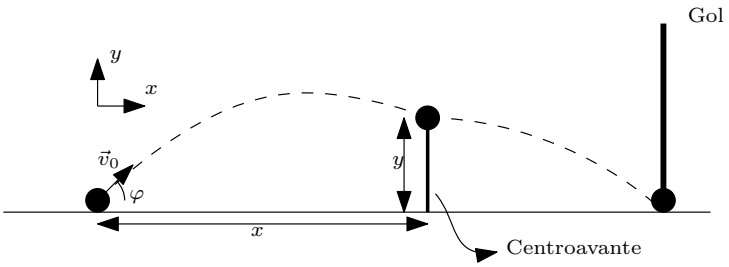
Lembre que o ângulo de lançamento que maximiza o alcance é o ângulo de 45°. Vamos aplicar esse ângulo na equação do alcance:

$$A_m = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.45^\circ) = \frac{15^2}{9,8}.sen(90^\circ) = 22,96\ m$$

Demos subtrair a distância do jogador ao gol também. Logo, a menor distância que a arquibancada pode estar do gol é:

$$d = A_m - 9 = 13,96\ m$$

3.14 Análise física de um gol



a Ângulo de lançamento da bola

Vamos usar novamente a Equação geral do movimento parabólico:

$$tg(\varphi) = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 2.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 + \Delta y\right)}}{g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2}$$

Neste caso, queremos que quando $x = 20,5 - 5,5 = 15,0\ m$ (distância lançador - centroavante), $y = 1,80\ m$ (altura do centroavante). Vamos substituir estes dados e ver as soluções:

$$tg(\varphi) = \frac{15 \pm \sqrt{15^2 - 2.9,8.\left(\frac{15}{15}\right)^2.\left(\frac{1}{2}.9,8.\left(\frac{15}{15}\right)^2 + 1,8\right)}}{9,8.\left(\frac{15}{15}\right)^2} = \frac{15 \pm 9,68}{9,8} \Rightarrow \varphi = arctg\left(\frac{15 \pm 9,68}{9,8}\right)$$

As soluções, positivas e negativas, respectivamente, são: $\varphi_1 = 68,3°$ e $\varphi_2 = 28,5°$.

A solução negativa nos dá um ângulo menor, ou seja, o tempo que a bola leva para chegar ao jogador é menor. Por isso, φ_2 é o ângulo que escolheremos!

b Incremento de velocidade impresso na bola

A velocidade vertical com que a bola chega na cabeça do centroavante pode ser encontrada pela equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.g.\Delta y = v_0^2.sen^2(\varphi) - 2.g.\Delta y = 15^2.sen^2(28,5°) - 2.9,8.1,8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_y = \sqrt{15^2.sen^2(28,5°) - 2.9,8.1,8} = 3,99\ \frac{m}{s}$$

O tempo que leva para a bola atingir o chão é dado pela equação horária da velocidade, já que quando atinge o chão sua velocidade deve ser igual a velocidade inicial:

$$v_y = v_{0y} - g.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{-\Delta v_y}{g} = \frac{-(3,99 - 15.sen(28,5°))}{9,8} = 0,323\ s$$

A velocidade horizontal que a bola precisa ter para percorrer a distância que falta até o gol neste período é dada pela equação horária da posição horizontal:

$$x = x_0 + v_x.\Delta t \Rightarrow v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{20,5 - 15}{0,323} = 17,03 \ \frac{m}{s}$$

Como sabemos que a velocidade horizontal não se altera pela gravidade, podemos calcular o quanto a cabeçada incrementou na velocidade calculando a variação da velocidade:

$$v_{inc} = v_x - v_{0x} = 17,03 - 15.cos(28,5^\circ) = 3,85 \ \frac{m}{s}$$

3.15 Lançamento de um projétil

a Ângulo de lançamento

Através da equação horária da velocidade vertical, podemos calcular o tempo total de voo[††]:

$$v_y = 0 = v_{0y} - g.t_s = v_0.sen(\theta) - \frac{g}{2}.t \Rightarrow t = \frac{2.v_0.sen(\theta)}{g}$$

Com isso, podemos calcular a altura máxima, usando a equação horária da posição vertical:

$$y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow 0 = H + 0.\frac{v_0.sen(\theta)}{g} - \frac{1}{2}g.\left(\frac{v_0.sen(\theta)}{g}\right)^2 \Rightarrow H = \frac{1}{2}.\frac{v_0^2}{g}.sen^2(\theta)$$

E o alcance, como já vimos, é:

$$A = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\theta)$$

Como $A = 4.H$, obtemos:

$$A = 4.H \Rightarrow \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\theta) = 4.\frac{1}{2}.\frac{v_0^2}{g}.sen^2(\theta) \Rightarrow 2.\frac{v_0^2}{g}.sen(\theta).cos(\theta) = 2.\frac{v_0^2}{g}.sen^2(\theta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow cos(\theta) = sen(\theta) \Rightarrow \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)} = tg(\theta) = 1 \Rightarrow \theta = arctg(1) = 45^\circ$$

b Velocidade inicial

Sabemos que o tempo t é 2 s, então podemos voltar à primeira equação e isolar a velocidade v_0, pois já temos θ:

$$v_0 = \frac{g.t}{2.sen(\theta)} = \frac{9,8.2}{2.sen(45^\circ)} = 13,9\ \frac{m}{s}$$

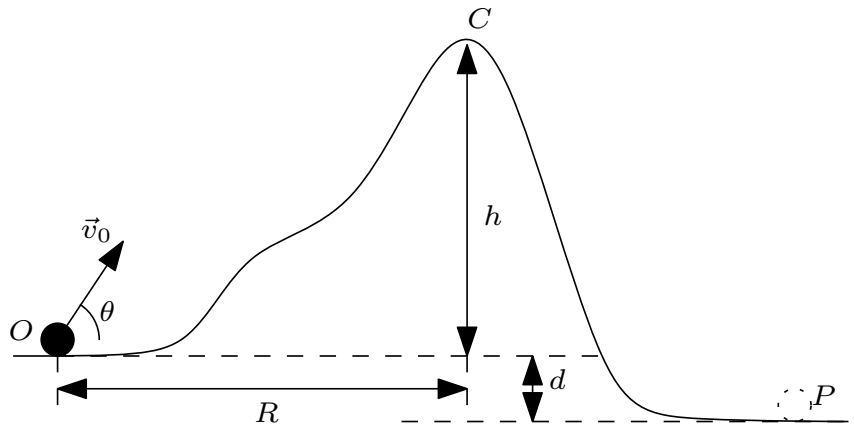
c Alcance do projétil

O alcance é o alcance máximo, pois $\theta = 45^\circ$. Então teremos:

$$A = \frac{v_0^2}{g} = \frac{13,9^2}{9,8} = 19,6\ m$$

[††]Lembre que o tempo de subida t_s é o tempo total de voo t dividido por 2.

3.16 Tiro de canhão



Se o projétil passa pelo ponto C quase tangenciando-o, podemos dizer que a altura máxima desse lançamento é h, ocorrendo na posição horizontal R. Então, a velocidade inicial em função de θ e h é dada pela equação da altura máxima:

$$h = \frac{v_y^2}{2.g} = \frac{v_0^2.sen^2(\theta)}{2.g} \Rightarrow v_0^2 = \frac{2.h.g}{sen^2(\theta)} \Rightarrow v_0 = \frac{\sqrt{2.g.h}}{sen(\theta)}$$

Após passar a montanha, quando o projétil estiver novamente em $y = 0\ m$ (e, como a parábola é simétrica, também estará em $x = 2.R$), sua velocidade será igual à velocidade inicial (em módulo), ou seja, $v_0.sen(\theta)$. Ponto descobrir a velocidade vertical do projétil ao chegar em P pela equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_0^2 - 2.g.\Delta y = v_0^2.sen^2(\theta) - 2.g.(0 - d) = 2.g.h + 2.g.d \Rightarrow v_y = \sqrt{2.g.(d + h)}$$

O tempo t para que o projétil atinja essa velocidade vertical pode ser encontrado usando a equação horária da velocidade na vertical:

$$v_y = v_{0y} + g.t \Rightarrow t = \frac{v_y - v_{0y}}{g} = \frac{\sqrt{2.g.(d + h)} - \sqrt{2.g.h}}{g} = \sqrt{\frac{2}{g}}.(\sqrt{h + d} - \sqrt{h})$$

A velocidade horizontal é constante, então a distância OP é descoberta com a equação horária da posição horizontal (vamos também usar a velocidade inicial que encontramos):

$$OP = 2.R + v_{0x}.t = 2.R + v_0.cos(\theta).\sqrt{\frac{2}{g}}.(\sqrt{h + d} - \sqrt{h}) =$$

$$= 2.R + \frac{\sqrt{2.g.h}}{sen(\theta)}.cos(\theta).\sqrt{\frac{2}{g}}.(\sqrt{h + d} - \sqrt{h}) = 2.R + \frac{\sqrt{2.g.h}}{tg(\theta)}.\sqrt{\frac{2}{g}}.(\sqrt{h + d} - \sqrt{h})$$

Agora precisamos descobrir quem é $tg(\theta)$ e nosso problema está resolvido! Usando a equação geral do movimento parabólico, sabemos que nossa trajetória deve passar pela coordenada (R, h). Logo, substituindo y, x e v_0^2:

$$y = x.tg(\theta) - \frac{1}{2}.g.\left(\frac{x}{v_0}\right)^2.\frac{1}{cos^2(\theta)} \Rightarrow h = R.tg(\theta) - \frac{g}{2}.\frac{R^2}{\frac{2.g.h}{sen^2(\theta)}}.\frac{1}{cos^2(\theta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = R.tg(\theta) - \frac{R^2}{4.h}.tg^2(\theta) \Rightarrow \frac{R^2}{4.h}.tg^2(\theta) - R.tg(\theta) + h = 0$$

Resolvendo por Bháskara:

$$tg(\theta) = \frac{R \pm \sqrt{R^2 - R^2}}{\frac{R^2}{2.h}} = 2.h\frac{R \pm 0}{R^2} = \frac{2.h}{R}$$

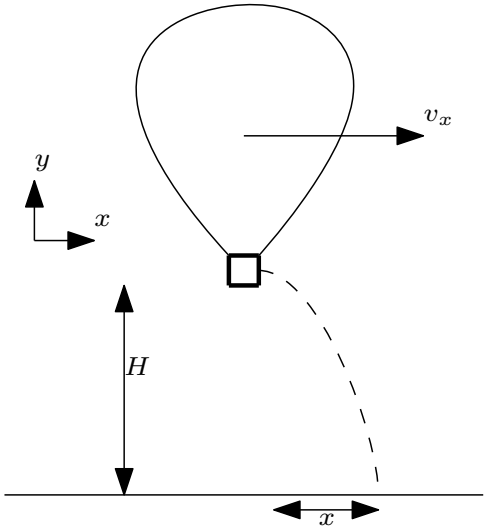
Substituindo o resultado na nossa equação de OP:

$$OP = 2.R + \frac{\sqrt{2.g.h}}{\frac{2.h}{R}}.\sqrt{\frac{2}{g}}.(\sqrt{h+d} - \sqrt{h}) = 2.R + R.\sqrt{\frac{1}{h}}.(\sqrt{h+d} - \sqrt{h}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OP = 2.R + R.\left(\sqrt{1+\frac{d}{h}} - 1\right) = 2.R + R.\sqrt{1+\frac{d}{h}} - R = R + R.\sqrt{1+\frac{d}{h}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OP = R.\left(1 + \sqrt{1+\frac{d}{h}}\right)$$

3.17 Pedra caindo de balão



a Velocidade do balão

Podemos encontrar a velocidade vertical da pedra ao chegar no chão com a equação horária da velocidade:

$$v_y = v_{0y} - g.t = 0 - 9,8.3 = -29,4 \ \frac{m}{s}$$

Sabemos que a velocidade horizontal da pedra é a mesma do balão, logo vale a relação trigonométrica:

$$tg(90° - \theta) = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow v_x = \frac{v_y}{tg(90° - \theta)} = \frac{29,4}{tg(90° - 30°)} = \frac{29,4}{tg(60°)}$$

$$v_x = 17 \ \frac{m}{s}$$

b Altura da queda

Sabemos as velocidades verticais final e inicial, logo, por Torricelli, podemos descobrir a distância percorrida:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2.g.\Delta y = 0^2 + 2.g.H \Rightarrow H = \frac{v_y^2}{2.g} = \frac{29,4^2}{2.9,8} = 44,10 \ m$$

c Distância horizontal percorrida

Sabemos a velocidade horizontal da pedra e o tempo que a mesma passa no ar. Logo, pela equação horária da posição vertical:

$$x = x_0 + v_{0x}.t = 0 + 17.3 = 51 \ m$$

d Velocidade final da pedra

Vetorialmente, sua velocidade final é:

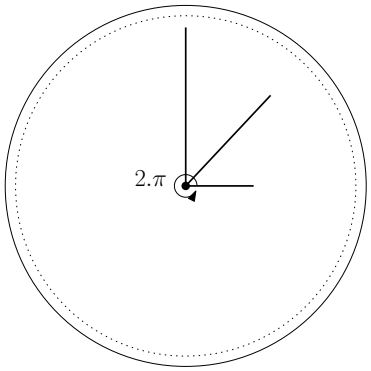
$$\vec{v} = v_x \ \hat{i} + v_y \ \hat{j} = 17 \ \hat{i} - 29,4 \ \hat{j}$$

(em $\frac{m}{s}$)

O módulo, por sua vez, é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{17^2 + 29,4^2} = 34 \ \frac{m}{s}$$

3.18 Velocidade angular dos ponteiros do relógio



Todos os ponteiros dão uma volta completa, ou seja, percorrem, angularmente, $360° = 2.\pi$.

a Ponteiro das horas

O ponteiro das horas dá uma volta completa a cada 12 horas, que é o mesmo que 12.3600 segundos. Portanto:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2.\pi}{12.3600} = 1,45.10^{-4}\ \frac{rad}{s}$$

b Ponteiro dos minutos

O ponteiro dos minutos dá uma volta completa a cada 1 hora, ou seja, 3600 segundos. Então:

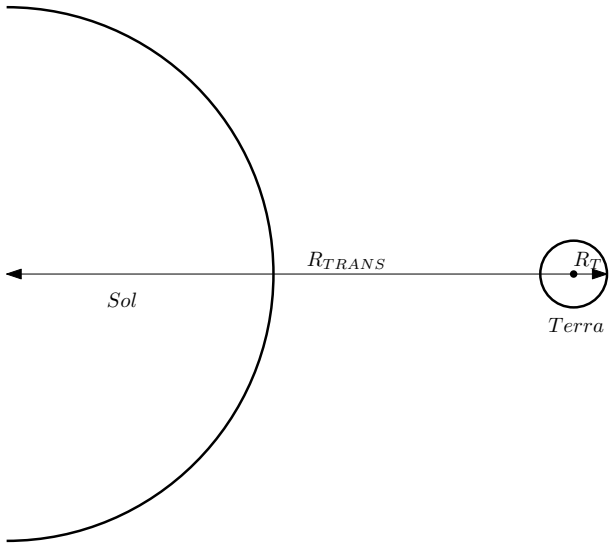
$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2.\pi}{3600} = 1,75.10^{-3}\ \frac{rad}{s}$$

c Ponteiro dos segundos

Por fim, o ponteiro dos segundos dá uma volta completa em apenas 1 minuto, ou 60 segundos. Então temos:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2.\pi}{60} = 1,05.10^{-1}\ \frac{rad}{s}$$

3.19 Velocidade linear por conta do movimento do Planeta Terra



Considerando a rotação da Terra, a velocidade linear sobre a linha do equador dependerá do raio da trajetória, que no caso é o raio da própria Terra, da seguinte forma:

$$v_r = \frac{2.\pi.R_T}{T}$$

Usando um valor de 6371 km para o raio da Terra, obtemos:

$$v_r = \frac{2.\pi.6371.10^3}{24.3600} = 463,3\ \frac{m}{s}$$

Neste caso, a aceleração centrípeta é:

$$a_{cp_r} = \frac{v_r^2}{R_T} = \frac{463,3^2}{6371.10^3} = 0,00337\ \frac{m}{s^2} = \frac{0,00337}{9,8}.g = 0,34\%.g$$

Considerando o movimento de translação da Terra em torno do Sol, teremos algo semelhante, mas substituindo R_T por R_{TRANS}, que é o raio de translação da Terra, consideraremos ele valendo $1,5.10^8$ km:

$$v_t = \frac{2.\pi.R_{TRANS}}{T}$$

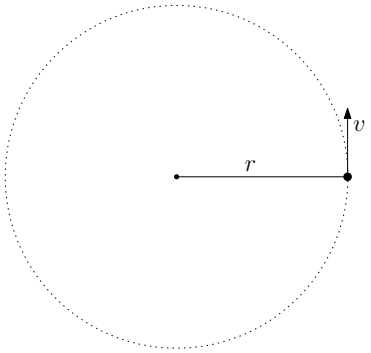
Não esqueça que agora o período T é a quantidade de segundos contida em 1 ano.

$$v_t = \frac{2.\pi.1,5.10^8.10^3}{365.24.3600} = 2,99.10^4\ \frac{m}{s} = 29,9\ \frac{km}{s}$$

A aceleração centrípeta também sofrerá as mesmas mudanças:

$$a_{cp_t} = \frac{v_t^2}{R_{TRANS}} = \frac{(2,99.10^4)^2}{1,5.10^8.10^3} = 0,00595\ \frac{m}{s^2} = \frac{0,00595}{9,8}.g = 0,06\%.g$$

3.20 Partícula em ultracentrífuga



A aceleração centrípeta é dada por:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r}$$

Como não sabemos a velocidade linear, mas sim a velocidade angular (em rpm), podemos usar o vínculo geométrico

$$v = \omega.r$$

na equação da aceleração centrípeta:

$$a_{cp} = \frac{(\omega.r)^2}{r} = \omega^2.r$$

Como 1 rpm equivale a $\frac{2.\pi}{60}\ \frac{rad}{s}$, obtemos o seguinte valor:

$$a_{cp} = \left(50000.\frac{2.\pi}{60}\right)^2.0,2 = 5,48.10^6\ \frac{m}{s^2}$$

Queremos o valor com relação à g, então dividimos e multiplicamos pelo mesmo:

$$a_{cp} = \frac{5,48.10^6}{9,8}.g = 5,6.10^5.g$$

3.21 Hora que os ponteiros de um relógio coincidem

Às 9 horas, a posição angular dos ponteiros de hora e minuto são:

$$\theta_{0h} = \frac{3}{2}.\pi$$

$$\theta_{0m} = 0$$

Sendo m o índice para o ponteiro de **m**inutos e h o índice para o ponteiro de **h**oras.

Queremos que a posição angular de m e h, sejam iguais. Logo, igualaremos as funções horárias da posição angular de ambos os ponteiros:

$$\theta_m = \theta_h \Rightarrow \theta_{0h}+\omega_h.t = \theta_{0m}+\omega_m.t \Rightarrow \theta_{0h}-\theta_{0m} = \omega_m.t-\omega_h.t = (\omega_m-\omega_h).t \Rightarrow t = \frac{\theta_{0h}-\theta_{0m}}{\omega_m-\omega_h}$$

No problema (3.18) calculamos o valor dessas velocidades angulares médias. Assim, obtemos:

$$t = \frac{\frac{3}{2}.\pi - 0}{\frac{2.\pi}{3600} - \frac{2.\pi}{12.3600}} = 2945\ s$$

Isto é, 49 min e 5 s.

Assim, concluímos que às 9 h, 49 min, 5 s, os ponteiros dos minutos e horas estão no mesmo ponto.

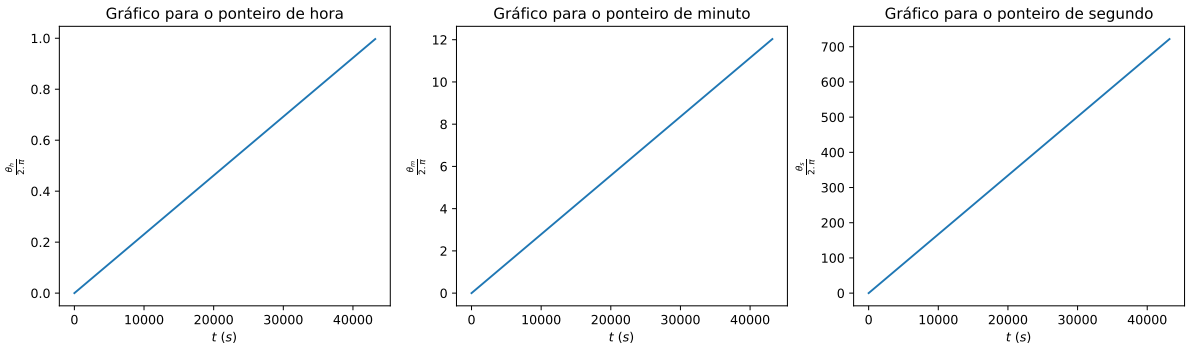
As equações de movimento angular para o ponteiro das horas, minutos e segundos, respectivamente, partindo de meio-dia (ângulo 0 rad) são:

$$\theta_h = \omega_h.t$$

$$\theta_m = \omega_m.t$$

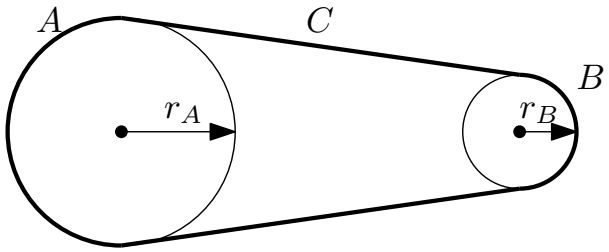
$$\theta_s = \omega_s.t$$

No plote desses gráficos, podemos observar algo interessante, veja que consegue perceber:



O único ponto em que o eixo y vale um número inteiro nos 3 gráficos é em $t = 12.360\ s$, ou seja, só meio-dia e meia-noite os três ponteiros estão no mesmo ponto angular.

3.22 Corrente em rodas



A variação angular da roda maior é, em radianos:

$$\Delta\theta = 1.540.2.\pi = 1080.\pi\ rad$$

Como a aceleração angular é constante (uniforme), vale a relação das velocidades médias. Com ela, descobrimos a velocidade angular final da roda maior:

$$\frac{\Delta\theta}{t} = \frac{\omega + \omega_0}{2} = \frac{\omega}{2} \Rightarrow \omega = 2.\frac{\Delta\theta}{t} = 2.\frac{1080.\pi}{60} = 113,1\ \frac{rad}{s}$$

Como as duas rodas estão ligadas por uma correia que **não** desliza, elas devem ter a mesma velocidade linear em suas extremidades[‡‡]. Aplicando isto, descobrimos a velocidade angular da roda menor:

$$v_A = v_B \Rightarrow \omega_A.r_A = \omega_B.r_B \Rightarrow \omega_B = \frac{r_A}{r_B}.\omega_A = \frac{30}{20}.2.\frac{1080.\pi}{60} = 169,6\ \frac{rad}{s} = 1620\ rpm$$

A velocidade linear da correia é:

$$v_c = \omega_A.r_A = \omega_B.r_B = \frac{30}{20}.2.\frac{1080.\pi}{60}.0,20 = 33,9\ \frac{m}{s}$$

[‡‡]Podemos visualizar isto como uma condição de não-rompimento da correia.

3.23 Acelerando e freando uma roda

Perceba que temos um total de 3 momentos: no primeiro aceleramos até uma velocidade angular ω (que foi dada), no segundo mantemos essa velocidade constante por algum tempo e no terceiro, e último, freamos até o repouso.

Como a aceleração nos momentos 1 e 3 é constante, vale que a velocidade média é a média das velocidades. Assim, para esses momentos, temos:

$$\frac{\Delta\theta_1}{t_1} = \frac{\omega_{01} + \omega_1}{2} = \frac{0 + \omega}{2} = \frac{\omega}{2}$$

$$\frac{\Delta\theta_3}{t_3} = \frac{\omega_{03} + \omega_3}{2} = \frac{\omega + 0}{2} = \frac{\omega}{2}$$

No momento 2, temos a velocidade angular constante. Pela equação horária da posição angular, vale:

$$\theta_2 = \theta_{02} + \omega.t_2 \Rightarrow \Delta\theta_2 = \omega.t_2$$

Pelo enunciado, sabemos que a soma das variações angulares é 1080 rotações, logo:

$$\Delta\theta = \Delta\theta_1 + \Delta\theta_2 + \Delta\theta_3 = \frac{\omega.t_1}{2} + \omega.t_2 + \frac{\omega.t_3}{2}$$

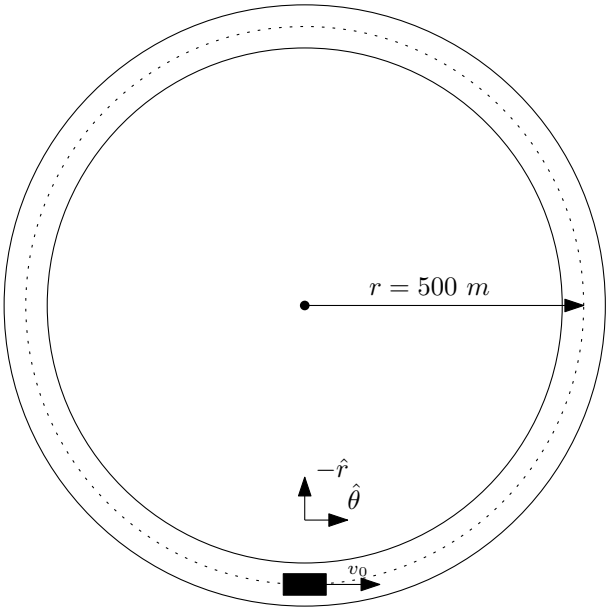
Como já sabemos quanto vale $\Delta\theta$ e também sabemos quanto valem t_1 e t_3 , podemos isolar t_2 e descobrir quanto o mesmo vale:

$$\omega.t_2 = \Delta\theta - \frac{\omega.t_1}{2} - \frac{\omega.t_3}{2} \Rightarrow t_2 = \frac{\Delta\theta}{\omega} - \frac{t_1 + t_3}{2} = \frac{1080}{180} - \frac{3+4}{2} = 2,5\ min$$

Sendo assim, o tempo total girando foi:

$$t = t_1 + t_2 + t_3 = 3 + 2,5 + 4 = 9,5\ min$$

3.24 Carro de corrida em pista circular



a Distância percorrida entre 0 e 1 segundo

A aceleração linear do carro pode ser encontrada com a equação horária da velocidade:

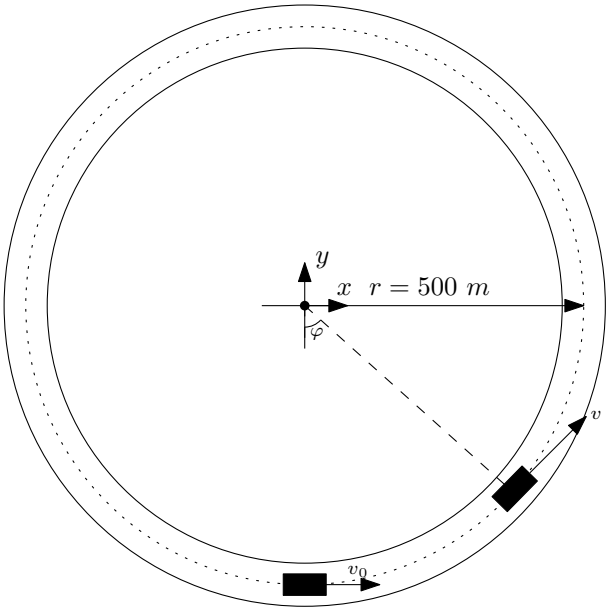
$$v_\theta = v_{0\theta} + a_\theta.t \Rightarrow a_\theta = \frac{\Delta v_\theta}{t} = \frac{240-60}{10}.\frac{1}{3,6} = 5\ \frac{m}{s^2}$$

Aplicando o tempo e a aceleração na equação horária da posição na direção $\hat{\theta}$:

$$r_\theta = r_{0\theta} + v_{0\theta}.t + \frac{1}{2}.a_\theta.t^2 \Rightarrow \Delta r_\theta = v_{0\theta}.t + \frac{1}{2}.a_\theta.t^2$$

$$\Delta r_\theta = 60.\frac{1}{3,6}.1 + \frac{1}{2}.5.1^2 = 19\ m$$

O gabarito deste item é obtido se considerarmos não 1 s, mas sim 10 s!



b Vetor aceleração média entre 0 e 10 segundos

No fim dos 10 s, ao percorrer 417 m, nosso vetor velocidade terá uma decomposição nas direções radial e tangencial. Pelo vínculo geométrico, podemos verificar quanto foi seu deslocamento angular φ:

$$\Delta r_\theta = R.\Delta\varphi \Rightarrow \Delta\varphi = \frac{\Delta r_\theta}{R} = \frac{417}{500} = 0,834\ rad$$

Então o vetor velocidade final pode ser escrito, em coordenadas cartesianas, como:

$$\vec{v} = v.cos(\varphi)\ \hat{i} + v.sen(\varphi)\hat{j}$$

E o vetor velocidade inicial, em coordenadas cartesianas, é:

$$\vec{v}_0 = v_0 \ \hat{i}$$

Então a aceleração média é, por definição:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} = \frac{v.cos(\varphi) - v_0}{\Delta t}\ \hat{i} + \frac{v.sen(\varphi)}{\Delta t}\ \hat{j} = \frac{\frac{240}{3,6}.cos(0,834) - \frac{60}{3,6}}{10}\ \hat{i} + \frac{\frac{240}{3,6}.sen(0,834)}{10}\ \hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{a}_m = 2,81\ \hat{i} + 4,94\ \hat{j}$$

Então o módulo da aceleração média é:

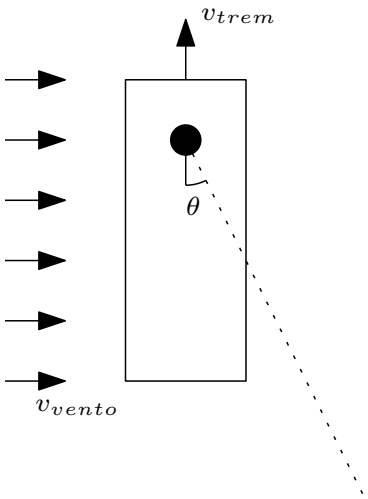
$$a_m = \sqrt{2,81^2 + 4,94^2} = 5,68\ \frac{m}{s^2}$$

E a direção do mesmo é dada pela Trigonometria:

$$tg(\gamma) = \frac{a_y}{a_x} \Rightarrow \gamma = arctg\left(\frac{a_y}{a_x}\right) = arctg\left(\frac{4,94}{2,81}\right) = 60,3^\circ$$

Ou seja, aponta para a direção que forma um ângulo γ com a horizontal.

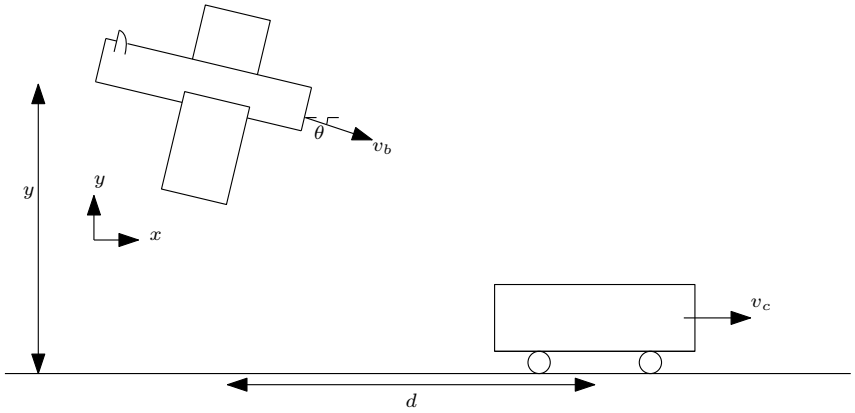
3.25 Fumaça do trem



Este é um clássico problema de composição de velocidades. Do ponto de vista de quem está no trem, a fumaça (pontilhado) deve sair paralela ao trem e com uma velocidade de mesmo módulo que a do trem, mas em sentido oposto. Porém, com o vento, surgirá uma nova componente da velocidade, ela pode ser calculada com Trigonometria:

$$tg(\theta) = \frac{v_{vento}}{v_{trem}} \Rightarrow v_{vento} = tg(\theta).v_{trem} = tg(14^\circ).120 = 29,9\ \frac{km}{h}$$

3.26 Bombardeiro atingindo um carro



Ao inclinar, o avião terá sua velocidade decomposta em duas direções diferentes, são elas:

$$v_{0x} = v.cos(\theta) = 180.cos(30°) = 155,9\ \frac{km}{h} = 43,3\ \frac{m}{s}$$

$$v_{0y} = -v.sen(\theta) = -180.sen(30°) = -90\ \frac{km}{h} = -25\ \frac{m}{s}$$

Como sabemos a altitude do avião e a velocidade inicial em y, podemos calcular, com a equação horária da posição vertical, o tempo decorrido até a bomba atingir o solo:

$$y = y_0 + v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow 0 = 300 - 25.t - \frac{1}{2}.9,8.t^2 \Rightarrow -4,9.t^2 - 25.t + 300 = 0$$

Por Bháskara, obtemos:

$$t = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 + 4.4,9.300}}{-9,8} = \frac{25 \pm 80,65}{-9,8}$$

Como $t < 0$ não tem sentido físico, pegaremos a raíz negativa:

$$t = \frac{25 - 80,65}{-9,8} = 5,68\ s$$

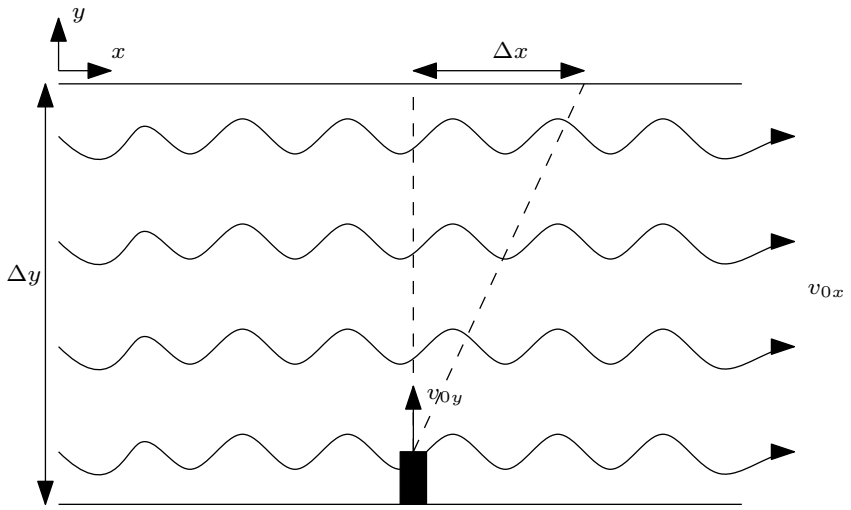
Vamos ver quanto vale a velocidade horizontal do bombardeiro com relação ao carro:

$$v_{b/c} = v_b - v_c = v_{0x} - v_c = 43,3 - \frac{90}{3,6} = 18,30\ \frac{m}{s}$$

Então a distância percorrida no tempo t, considerando a velocidade $v_{b/c}$ será a distância que o bombardeiro deve estar do carro. Pela equação horária da posição horizontal, obtemos:

$$x = x_0 + v_x.t \Rightarrow d = v_{b/c}.t = 18,30.5,68 = 104\ m$$

3.27 Atravessando o rio



a Tempo mínimo de travessia

Lembre que o tempo e a velocidade são grandezas inversamente proporcionais. Logo, o menor tempo possível é aquele obtido com a maior velocidade possível, que é a velocidade do barco sendo ortogonal à correnteza do rio. Neste caso, teremos:

$$y = y_0 + v_{0y}.t \Rightarrow t = \frac{\Delta y}{v_{0y}} = \frac{1}{2,5} = 0,4\ h = 24\ min = 1440\ s$$

Mas como temos correnteza, a coordenada x do barco ao chegar no outro lado do rio não será a mesma que tinha inicialmente. Para calcular seu deslocamento nesta direção, devemos considerar a velocidade da correnteza:

$$x = x_0 + v_{0x}.t \Rightarrow \Delta x = v_{0x}.t = 1,5.0,4 = 0,6\ km = 600\ m$$

b Chegando do outro lado do rio na mesma coordenadas x

No primeiro caso, devemos rotacionar o barco de tal forma que sua componente x de velocidade seja igual, em módulo à velocidade da correnteza, mas em sentido contrário, fazendo com que com o barco fique em repouso nessa direção. Podemos calcular o ângulo com auxílio da Trigonometria:

$$v.sen(\theta) = v_{0x} \Rightarrow \theta = arcsen\left(\frac{v_{0x}}{v}\right) = arcsen\left(\frac{1,5}{2,5}\right) = 36,87^\circ$$

Agora podemos calcular a componente da velocidade ortogonal à correnteza e, portanto, o tempo decorrido até atravessar o rio:

$$y = y_0 + v_y.t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\Delta y}{v_y} = \frac{\Delta y}{v.cos(\theta)} = \frac{1}{2,5.cos(36,87^\circ)} = 0,5\ h = 30\ min$$

Na segunda situação, podemos aproveitar o item (a), pois já calculamos a distância que o barco percorre no sentido da correnteza e o tempo que leva para atravessar. Como sabemos a velocidade de caminhada v_c, podemos calcular o tempo que ele leva caminhando:

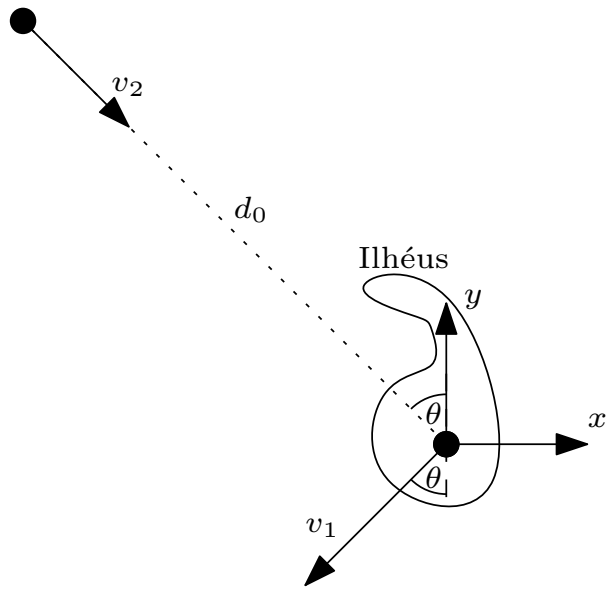
$$x = x_0 - v_c.t_c \Rightarrow t_c = \frac{-\Delta x}{v_c} = \frac{-(-0,6)}{6} = 0,1\ h = 6\ min$$

Então o tempo total t_2 é:

$$t_2 = t + t_c = 24 + 6 = 30\ min$$

Concluímos então que ambos os métodos levam o mesmo tempo.

3.28 Distância entre barcos



Devemos descrever a posição de ambos os barcos com relação ao nosso eixo de coordenadas (fixado na ilha), depois podemos calcular o vetor distância entre os dois. Para o primeiro barco (que está na ilha Ilhéus), teremos:

$$\vec{r}_1 = v_{1x}.t\ \hat{i} + v_{1y}.t\ \hat{j} = -v_1.sen(\theta).t\ \hat{i} - v_1.cos(\theta).t\ \hat{j}$$

Para o segundo barco (inicialmente a uma distância d_0 da ilha de Ilhéus), teremos:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + v_{2x}.t\ \hat{i} + v_{2y}.t\ \hat{j} = -d_0.sen(\theta)\ \hat{i} + d_0.cos(\theta)\ \hat{j} + v_2.sen(\theta).t\ \hat{i} - v_2.cos(\theta).t\ \hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{r}_2 = (-d_0.sen(\theta) + v_2.sen(\theta).t)\ \hat{i} + (d_0.cos(\theta) - v_2.cos(\theta).t)\ \hat{j}$$

A função que descreve a distância entre os dois barcos é a diferença entre os vetores $\vec{r}_2$ e $\vec{r}_1$. Portanto, teremos:

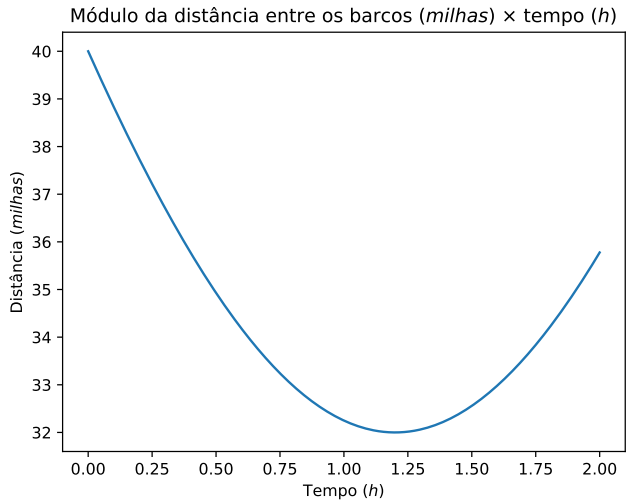
$$\vec{d}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (-d_0.sen(\theta) + v_2.sen(\theta).t)\ \hat{i} + (d_0.cos(\theta) - v_2.cos(\theta).t)\ \hat{j} - \left[-v_1.sen(\theta).t\ \hat{i} - v_1.cos(\theta).t\ \hat{j}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{d}(t) = (-d_0 + v_2.t + v_1.t).sen(\theta)\ \hat{i} + (d_0 + v_1.t - v_2.t).cos(\theta)\ \hat{j}$$

O módulo do vetor distância é oque nos interessa no fim das contas:

$$d(t) = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(-d_0 + v_2.t + v_1.t)^2.sen^2(\theta) + (d_0 + v_1.t - v_2.t)^2.cos^2(\theta)}$$

Graficamente podemos visualizar o ponto de mínimo como sendo o vértice da parábola descrita pelo módulo do vetor distância:



Como vimos em Cálculo 1, para calcular o extremo de uma função, calculamos sua derivada e igualamos a zero. Teoricamente, deveríamos calcular a segunda derivada para provar que o extremo é um mínimo, porém perceba que o extremo máximo, fisicamente, ocorre no infinito, pois é quando a distância entre os barcos é máxima. Logo, ao calcular o extremo, estaremos calculando o mínimo da função $d(t)$. Então teremos:

$$\frac{d}{dt}\, d(t) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\sqrt{(-d_0 + v_2.t + v_1.t)^2.sen^2(\theta) + (d_0 + v_1.t - v_2.t)^2.cos^2(\theta)}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.(-d_0 + v_2.t + v_1.t).(v_2 + v_1).sen^2(\theta) + 2.(d_0 + v_1.t - v_2.t).(v_1 - v_2).cos^2(\theta) = 0 \Rightarrow$$

Chamemos $v_1 + v_2$ de V e $v_1 - v_2$ de Δv

$$\Rightarrow (-d_0 + v_2.t + v_1.t).V.sen^2(\theta) + (d_0 + v_1.t - v_2.t).\Delta v.cos^2(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_0.(\Delta v.cos^2(\theta) - V.sen^2(\theta)) + ((v_1 + v_2).V.sen^2(\theta) + (v_1 - v_2).\Delta v.cos^2(\theta)).t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_0.(\Delta v.cos^2(\theta) - V.sen^2(\theta)) + (V^2.sen^2(\theta) + \Delta v^2.cos^2(\theta)).t = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = d_0.\frac{V.sen^2(\theta) - \Delta v.cos^2(\theta)}{V^2.sen^2(\theta) + \Delta v^2.cos^2(\theta)}$$

Como, no nosso caso, $cos(\theta) = sen(\theta)$, obtemos:

$$t = 40.\frac{(16 + 12) - (16 - 12)}{(16 + 12)^2 + (16 - 12)^2} = 1,2\ h$$

Como começamos a contar o tempo a partir das $8:00$, quando o relógio marcar $9:12$ eles estarão na menor distância possível.

Podemos usar a equação do módulo do vetor distância para saber a quantas milhas eles estarão:

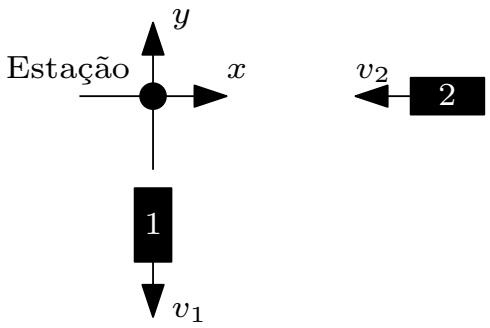
$$d(1,2) = d_{min} = \sqrt{(-40 + 12.1,2 + 16.1,2)^2.sen^2(45°) + (40 + 16.1,2 - 12.1,2)^2.cos^2(45°)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{min} = 32\ milhas$$

Existe uma forma mais fácil de resolver este problema, você consegue descobrir qual é?[§§]

[§§]Dica: Teorema de Pitágoras

3.29 Trens passando pela estação



a Vetor velocidade relativa do segundo em relação ao primeiro

Como o trem 1 tem velocidade vertical e o trem 2 tem velocidade horizontal, pela composição vetorial, a velocidade relativa do segundo em relação ao primeiro é:

$$\vec{v}_{2/1} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = -v\ \hat{i} - (-v\ \hat{j}) = -60\ \hat{i} + 60\ \hat{j}$$

(em $\frac{km}{h}$)

Logo, o módulo da velocidade relativa é:

$$v_{2/1} = \sqrt{v_{2/1_x}^2 + v_{2/1_y}^2} = \sqrt{60^2 + 60^2} = 85\ \frac{km}{h}$$

Pela Trigonometria, podemos calcular também em qual direção aponta o vetor com relação à horizontal:

$$tg(\alpha) = \frac{v_{2/1_y}}{v_{2/1_x}} \Rightarrow \alpha = arctg\left(\frac{v_{2/1_y}}{v_{2/1_x}}\right) = arctg\left(\frac{60}{-60}\right) = -45^\circ$$

Ou seja, é um vetor que faz um ângulo de 45° com o eixo $-x$ ou 135° com o eixo $+x$. O que significa que aponta para 45° entre o Norte e o Oeste.

b Deslocamento relativo

Como já temos a velocidade relativa do trem 2 em relação ao trem 1, podemos integrar e obter o vetor deslocamento relativo:

$$\Delta\vec{r}_{2/1} = \int \vec{v}_{2/1}\ dt = \int (-60\ \hat{i} + 60\ \hat{j})\ dt \Rightarrow \Delta\vec{r}_{2/1} = -60.\Delta t\ \hat{i} + 60.\Delta t\ \hat{j}$$

Os respectivos deslocamentos relativos, em km, são:

- $\Delta t = 0\ min$

$$\Delta\vec{r}_{2/1} = -60.\frac{0}{60}\ \hat{i} + 60.\frac{0}{60}\ \hat{j} = 0\ \hat{i} + 0\ \hat{j}$$

- $\Delta t = 2\ min$

$$\Delta\vec{r}_{2/1} = -60.\frac{2}{60}\ \hat{i} + 60.\frac{2}{60}\ \hat{j} = -2\ \hat{i} + 2\ \hat{j}$$

- $\Delta t = 4\ min$

$$\Delta\vec{r}_{2/1} = -60.\frac{4}{60}\ \hat{i} + 60.\frac{4}{60}\ \hat{j} = -4\ \hat{i} + 4\ \hat{j}$$

O vetor deslocamento relativo, como era de se esperar, segue a mesma do vetor velocidade relativa[¶¶].

c Distância mínima entre os trens

Vamos considerar $t = 0$ o momento em que o trem 1 passa pela estação e a mesma será a origem do nosso centro de coordenadas. Então o vetor posição do primeiro trem é:

$$\vec{r}_1 = v_{1x}.t\ \hat{i} + v_{1y}.t\ \hat{j} = -60.t\ \hat{j}$$

Para o vetor posição do segundo trem é necessário uma constante, a posição inicial, pois em $t = 0$ ele não está na origem, o mesmo só chega na origem em $t = 2\ min$:

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_0 + v_{2x}.t\ \hat{i} + v_{2y}.t\ \hat{j} = \vec{r}_0 - 60.t\ \hat{i}$$

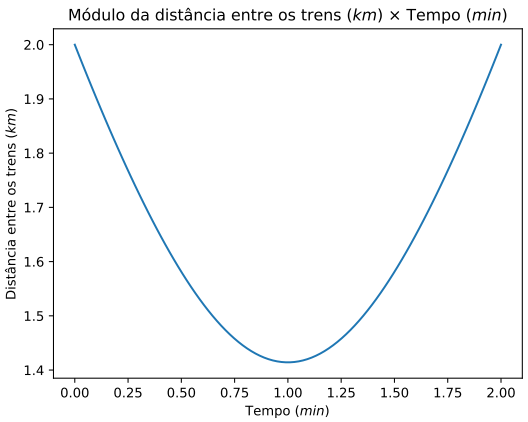
Em $t = 2\ min$, temos $\vec{r}_2 = \vec{0}$:

$$\vec{r}_2 = \vec{0} = \vec{r}_0 - 60.\frac{2}{60}\ \hat{i} \Rightarrow \vec{r}_0 = 2\ \hat{i}$$

(em $\frac{km}{h}$)

Então o vetor posição do trem 2 é:

$$\vec{r}_2 = 2\ \hat{i} - 60.t\ \hat{i}$$



A distância entre eles é a diferença entre os vetores de posição:

$$\vec{d}(t) = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = 2\ \hat{i} - 60.t\ \hat{i} - (-60.t\ \hat{j}) = (2 - 60.t)\ \hat{i} + 60.t\ \hat{j}$$

O vetor não nos interessa, mas sim o módulo:

$$d(t) = \sqrt{d_x^2 + d_y^2} = \sqrt{(2 - 60.t)^2 + (60.t)^2}$$

Descobrimos o mínimo dessa função ao derivar e igualar à zero[***]:

$$\frac{d}{dt}\ d(t) = \frac{d}{dt}\ (\sqrt{(2 - 60.t)^2 + (60.t)^2}) = 0 \Rightarrow 2.(2 - 60.t).(-60) + 2.(60.t).(60) = 0 \Rightarrow$$

[¶¶] Era de se esperar, pois a aceleração é nula, logo não há como haver inversão de velocidade.

[***] Veja o problema 3.28

$$\Rightarrow -120 + 60^2.t + 60^2.t = 0 \Rightarrow t = \frac{120}{2.60^2} = 0,01667\ h = 1\,\text{min}$$

Portanto, em $t = 1\ min$, a distância entre os trens é mínima e igual à:

$$d(1\ min) = d_min = \sqrt{\left(2 - 60.\frac{1}{60}\right)^2 + \left(60.\frac{1}{60}\right)^2} = 1,41\ km$$

3.30 Voo com vento entre duas cidades

a Tempo total de voo

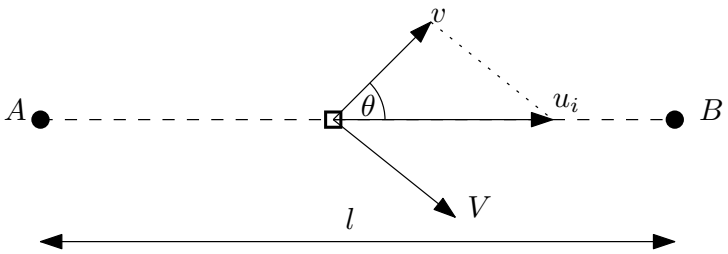
A velocidade resultante é tal que o avião se desloca em linha reta de A para B (e vice-versa). Portanto, a composição vetorial da velocidade do vento com a velocidade relativa do avião deve retornar um vetor que satisfaça essa condição, pois:

$$\vec{V} = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{u} = \vec{V} + \vec{v}$$

sendo $\vec{u}$ a velocidade do avião com relação ao solo (referencial em repouso).

Como o vetor $\vec{v}$ é fixo em módulo e em direção e sentido, e o vetor $vecV$ é fixo apenas em módulo, é o segundo que terá de se ajustar para que o vetor $\vec{u}$ tenha a direção correta na ida e na volta.

Com essa análise, na ida teremos a seguinte composição vetorial:



Aplicando a Lei dos Cossenos, obtemos a relação:

$$V^2 = v^2 + u_i^2 - 2.v.u_i.cos(\theta) \Rightarrow u_i^2 - 2.v.cos(\theta).u_i + v^2 - V^2 = 0$$

Por Bháskara:

$$u_i = \frac{2.v.cos(\theta) \pm \sqrt{4.v^2.cos^2(\theta) - 4.(v^2 - V^2)}}{2} = v.cos(\theta) \pm \sqrt{v^2.(cos^2(\theta) - 1) + V^2}$$

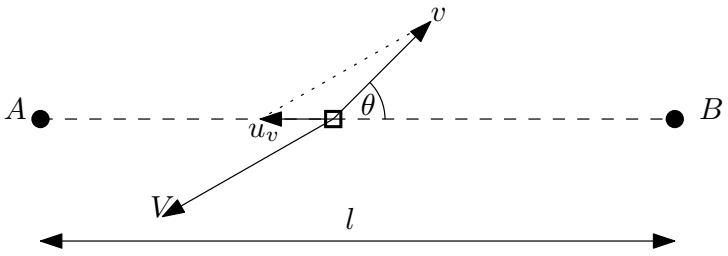
Como $sen^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$, obtemos:

$$u_i = v.cos(\theta) \pm \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}$$

Como estamos calculando o módulo de u_i, iremos pegar a raíz positiva, garantindo assim que este valor não será menor que zero. Portanto, a velocidade na ida é:

$$u_i = v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}$$

Para a volta, podemos pensar da mesma forma. Obtendo a seguinte composição vetorial:



Novamente, pela Lei dos Cossenos:

$$V^2 = v^2 + u_v^2 - 2.u_v.v.cos(\pi - \theta)$$

Neste caso, o ângulo no cosseno é $\pi - \theta$, pois lembre que este ângulo é o que "enxerga" o lado V do triângulo.

$$u_v^2 - 2.v.cos(\pi - \theta).u_v + v^2 - V^2 = 0$$

Usando a fórmula do cosseno da soma de dois ângulos[†††], chegamos em:

$$u_v^2 + 2.v.cos(\theta).u_v + v^2 - V^2 = 0$$

Por Bháskara:

$$u_v = \frac{-2.v.cos(\theta) \pm \sqrt{4.v^2.cos^2(\theta) - 4.(v^2 - V^2)}}{2} = -v.cos(\theta) \pm \sqrt{v^2.(cos^2(\theta) - 1) + V^2}$$

Pela mesma razão dita no cálculo de u_i, obtemos quase a mesma velocidade, mas com um sinal negativo no primeiro termo:

$$u_v = -v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}$$

Usando a equação horária da posição, podemos calcular o tempo total de ida e volta:

$$t = t_i + t_v = \frac{l}{u_i} + \frac{l}{u_v} = \frac{l}{v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}} + \frac{l}{-v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{l.[v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}] + l.[-v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}]}{[v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}].[-v.cos(\theta) + \sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}]} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2.l.\sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}}{-v^2.sen^2(\theta) + V^2 - v^2.cos^2(\theta)} = \frac{2.l.\sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}}{v^2.[-sen^2(\theta) - cos^2(\theta)] + V^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{2.l.\sqrt{-v^2.sen^2(\theta) + V^2}}{-v^2 + V^2} = \frac{2.l.\sqrt{-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta) + 1}}{\frac{-v^2}{V^2} + 1}.\frac{V}{V^2}$$

Concluímos assim que o tempo total da viagem é:

$$t = \frac{2.L}{V}\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta)}}{1 - \frac{v^2}{V^2}}$$

[†††] Lembre: $cos(a + b) = cos(a).cos(b) - sen(a).sen(b)$

b Comparação entre tempos de voo

Vamos olhar para o denominador, mais especificamente o fator $1-\frac{v^2}{V^2}$. Perceba que se $v = V$, teremos $1-1=0$ no denominador, assim o tempo total t tenderia ao infinito. Já quando $v > V$, o denominador seria negativo, ou seja, o tempo seria negativo, portanto é um resultado igualmente inválido, já que não haveria interpretação física. Logo, v está condicionado a ser menor que V.

O vento ser paralelo ou perpendicular ao caminho AB é definido pelo valor de θ. Para o vento sendo paralelo e para o vento sendo perpendicular, temos, respectivamente $\theta_{pa} = 0$ e $\theta_{pe} = \frac{\pi}{2}$. Cada tempo será:

$$t_{pa} = \frac{2.L}{V}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(0)}}{1-\frac{v^2}{V^2}} = \frac{2.L}{V}\frac{1}{1-\frac{v^2}{V^2}}$$

$$t_{pe} = \frac{2.L}{V}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\frac{\pi}{2})}}{1-\frac{v^2}{V^2}} = \frac{2.L}{V}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}{1-\frac{v^2}{V^2}} = \frac{2.L}{V}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}$$

A razão entre essas duas grandezas é:

$$\frac{t_{pa}}{t_{pe}} = \frac{\frac{2.L}{V}\frac{1}{1-\frac{v^2}{V^2}}}{\frac{2.L}{V}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}} = \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}}{1-\frac{v^2}{V^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}}} = \left(1-\frac{v^2}{V^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

c O vento sempre aumenta o tempo de viagem

Perceba que o fator em evidência $\frac{2.L}{V}$ é o tempo total t caso não tivesse vento. Então, para o tempo total quando há vento sempre ser maior que o sem vento, precisamos mostrar que:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta)}}{1-\frac{v^2}{V^2}} > 1$$

Lembre que, como foi discutido no item (b), o termo $1-\frac{v^2}{V^2}$ é positivo e menor que 1, já que $v < V$. Como $0 \leq sen^2(\theta) \leq 1$, é verdade que:

$$1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta) \geq 1-\frac{v^2}{V^2}$$

Como ainda temos o numerador elevado à $\frac{1}{2}$ (raíz quadrada), e o mesmo está entre 0 e 1, vale a desigualdade:

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta)} \geq 1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta)$$

Fica provado, então, que:

$$\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{V^2}.sen^2(\theta)}}{1-\frac{v^2}{V^2}} > 1$$

Então, se há vento, o tempo total aumentará!

CAPÍTULO

4

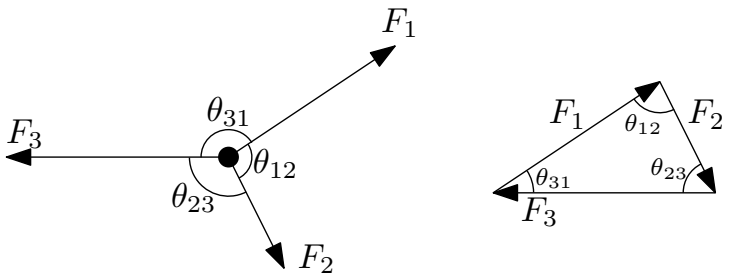
OS PRINCÍPIOS DA DINÂMICA

"A vida só pode ser compreendida olhando-se para trás, mas só pode ser vivida olhando-se para frente. O que o homem realmente precisa é de uma tensão entre o passado e o futuro, uma angústia criativa que o impulsione a agir e a transcender sua própria condição."

Søren Kierkegaard

4.1 Corpo em equilíbrio

Se o corpo está em equilíbrio, os vetores de força devem estar organizados de tal forma que a soma deles se anule vetorialmente. Podemos enxergar a situação como:

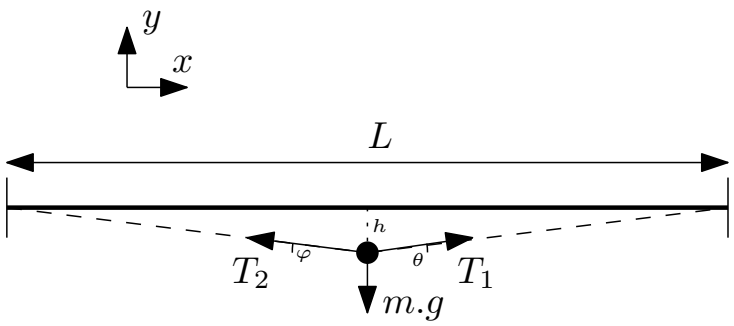


Perceba que a soma dos vetores gera um triângulo, logo, vale a Lei dos Senos:

$$\frac{F_1}{sen(\theta_{23})} = \frac{F_2}{sen(\theta_{31})} = \frac{F_3}{sen(\theta_{12})}$$

Podemos chegar à mesma solução impondo a condição de equilíbrio em cada direção.

4.2 Acrobata em equilíbrio na corda



Sabemos que o acrobata em no meio da corda, e sabemos também o tamanho da corda e o quanto a mesma desceu. Com isso, podemos calcular os ângulos θ e φ que, por simetria, são iguais.

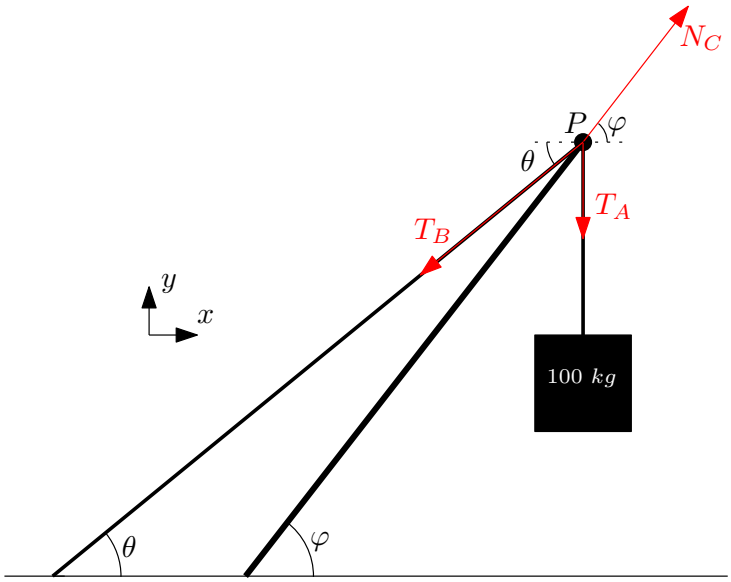
$$sen(\theta) = sen(\varphi) = \frac{h}{\frac{L}{2}} = 2.\frac{h}{L} \Rightarrow \theta = arcsen\left(2.\frac{h}{L}\right) = arcsen\left(2.\frac{0,3}{20}\right) = 1,72^{\circ}$$

Como o acrobata está em equilíbrio, as forças de tensão em cada metade da corda devem ser iguais em módulo, ou seja, $T_1 = T_2$. Considerando o equilíbrio vertical, obtemos:

$$T_1.sen(\theta) + T_2.sen(\varphi) - mg = 0 \Rightarrow T_1.sen(\theta) + T_1.sen(\theta) - m.g = 0 \Rightarrow 2.T_1.sen(\theta) - m.g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2.T_1.sen(\theta) = m.g \Rightarrow T_1 = \frac{m.g}{2.sen(\theta)} = \frac{60.9,8}{2.2.\frac{0,3}{20}} = 9800\ N = 1000\ kgf$$

4.3 Bloco em equilíbrio com viga



Se o bloco está em equilíbrio, a tensão da corda A deve ser igual ao peso do bloco. Logo:

$$T_A - m.g = 0 \Rightarrow T_A = m.g = 100.9,8 = 980\ N = 100\ kgf$$

Podemos aplicar a condição de equilíbrio para a vertical e para a horizontal na polia (P) já que ela não deve se mover.

- Na horizontal

$$N_C.cos(\varphi) - T_B.cos(\theta) = 0$$

- Na vertical

$$N_C.sen(\varphi) - T_B.sen(\theta) - T_A = 0$$

Isolando N_C da equação de equilíbrio horizontal:

$$N_C = \frac{cos(\theta)}{cos(\varphi)}.T_B$$

Substituindo na equação de equilíbrio vertical, obtemos uma equação que envolve os ângulos e T_A (que sabemos), e T_B (que queremos descobrir):

$$\frac{cos(\theta)}{cos(\varphi)}.T_B.sen(\varphi) - T_B.sen(\theta) - T_A = 0 \Rightarrow cos(\theta).tg(\varphi).T_B - T_B.sen(\theta) = T_A \Rightarrow$$

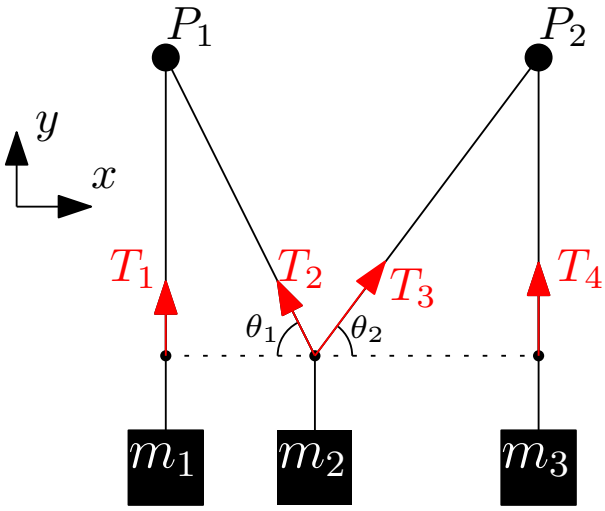
$$\Rightarrow T_B.(cos(\theta).tg(\varphi) - sen(\theta)) = T_A \Rightarrow T_B = \frac{T_A}{cos(\theta).tg(\varphi) - sen(\theta)} = \frac{100}{cos(30°).tg(45°) - sen(30°)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_B = 273\ kgf$$

Podemos retornar à equação em que isolamos N_C e substituir o valor obtido para T_B:

$$N_C = \frac{cos(30°)}{cos(45°)}.273 = 335\ kgf$$

4.4 Sistema de três massas em equilíbrio



Podemos começar aplicando a condição de equilíbrio aos corpos 1 e 3. Se eles estão em equilíbrio, a tensão em suas respectivas cordas devem ser iguais aos seus pesos. Para o corpo 1:

$T_1 - m_1.g = 0 \Rightarrow T_1 = m_1.g = 1, 5.9, 8 = 14, 7\ N$

Para o corpo 3:

$T_4 = m_3.g = 0 \Rightarrow T_4 = m_3.g = 2, 0.9, 8 = 19, 6\ N$

Agora podemos aplicar a condição de equilíbrio no nó do corpo 2. Verticalmente, a tensão resultante deve ser igual ao peso do corpo 2 (assim, o mesmo estará em repouso) e horizontalmente a tensão resultante deve ser zero, pois nem o nó e nem o corpo 2 se movem nesta direção.

- Na horizontal

$$T_3.cos(\theta_2) - T_2.cos(\theta_1) = 0$$

- Na vertical

$$T_3.sen(\theta_2) + T_2.sen(\theta_1) - m_2.g = 0$$

Vamos manipular algebricamente a equação obtida no equilíbrio horizontal para surja um $sen(\theta_2)$:

$$T_3.cos(\theta_2) = T_2.cos(\theta_1) \Rightarrow T_3^2.cos^2(\theta_2) = T_2^2.cos^2(\theta_1) \Rightarrow$$

Usando a relação fundamental da Trigonometria:

$$\Rightarrow T_3^2.(1 - sen^2(\theta_2)) = T_2^2.(1 - sen^2(\theta_1)) \Rightarrow sen(\theta_2) = \sqrt{1 + \frac{T_2^2}{T_3^2}.(sen^2(\theta_1) - 1)}$$

Agora substituímos este resultado na equação do equilíbrio vertical:

$$T_3.\sqrt{1 + \frac{T_2^2}{T_3^2}.(sen^2(\theta_1) - 1)} + T_2.sen(\theta_1) - m_2.g = 0 \Rightarrow T_3.\sqrt{1 + \frac{T_2^2}{T_3^2}.(sen^2(\theta_1) - 1)} = m_2.g - T_2.sen(\theta_1)$$

$$\Rightarrow T_3^2.\left(1+\frac{T_2^2}{T_3^2}.(sen^2(\theta_1)-1)\right) = \Big[m_2.g-T_2.sen(\theta_1)\Big]^2 = m_2^2.g^2+T_2^2 sen^2(\theta_1)-2.m_2.g.T_2.sen(\theta_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3^2 + T_2^2.(sen^2(\theta_1)-1) = m_2^2.g^2 + T_2^2 sen^2(\theta_1) - 2.m_2.g.T_2.sen(\theta_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3^2 - T_2^2 = m_2^2.g^2 - 2.m_2.g.T_2.sen(\theta_1) \Rightarrow 2.m_2.g.T_2.sen(\theta_1) = m_2^2.g^2 + T_2^2 - T_3^2 \Rightarrow$$

$$sen(\theta_1) = \frac{m_2^2.g^2 + T_2^2 - T_3^2}{2.m_2.g.T_2} \Rightarrow \theta_1 = arcsen\left(\frac{m_2^2.g^2 + T_2^2 - T_3^2}{2.m_2.g.T_2}\right)$$

Perceba que as tensões T_1 e T_2 atuam no mesmo fio, assim como T_3 e T_4. Logo, elas são iguais entre si. Portanto, o ângulo θ_1 pode ser determinado por:

$$\theta_1 = arcsen\left(\frac{m_2^2.g^2 + T_1^2 - T_4^2}{2.m_2.g.T_1}\right) = arcsen\left(\frac{2,5^2.9,8^2 + 14,7^2 - 19,6^2}{2.2,5.9,8.14,7}\right) = 36,9^\circ$$

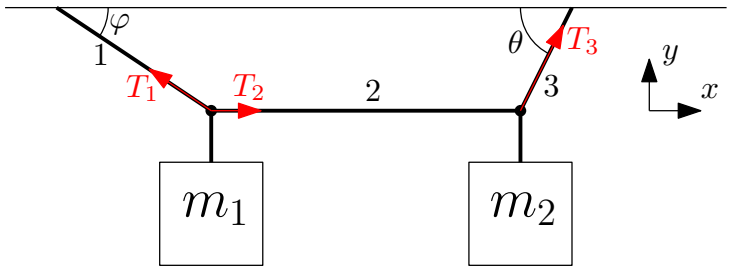
Com θ_1 definido, lembre que expressamos o $sen(\theta_2)$ em função do $sen(\theta_1)$, com isso podemos determinar o ângulo θ_2:

$$sen(\theta_2) = \sqrt{1+\frac{T_2^2}{T_3^2}.(sen^2(\theta_1)-1)} \Rightarrow \theta_2 = arcsen\left(\sqrt{1+\frac{T_2^2}{T_3^2}.(sen^2(\theta_1)-1)}\right)$$

Substituindo pelas tensões que conhecemos, obtemos:

$$\theta_2 = arcsen\left(\sqrt{1+\frac{T_1^2}{T_4^2}.(sen^2(\theta_1)-1)}\right) = arcsen\left(\sqrt{1+\frac{14,7^2}{19,2^2}.(sen^2(36,9^\circ)-1)}\right) = 53,1^\circ$$

4.5 Dois corpos em equilíbrio conectados por fio



A componente vertical da tensão no fio 1 deve sustentar o peso do corpo 1 para que o mesmo esteja em equilíbrio. Aplicando a condição de equilíbrio na vertical obtemos a tensão T_1:

$$T_1.sen(\varphi) - m_1.g = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{m_1.g}{sen(\varphi)} = \frac{100.9,8}{sen(30°)} = 1960\ N$$

Como o corpo 1 também está em equilíbrio horizontal, a componente horizontal da tensão T_1 deve ser igual à tensão T_2 do fio 2. Então, aplicando a condição de equilíbrio horizontal, obtemos a tensão T_2:

$$T_1.cos(\varphi) - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1.cos(\varphi) = 1960.cos(30°) = 1697\ N$$

Olhando agora para o corpo 2, podemos aplicar a condição de equilíbrio na horizontal e na vertical:

- Na horizontal

$$T_3.cos(\theta) - T_2 = 0$$

- Na vertical

$$T_3.sen(\theta) - m_2.g = 0$$

Vamos usar a equação obtida pelo equilíbrio horizontal para obter o $sen(\theta)$:

$$T_3.cos(\theta) = T_2 \Rightarrow T_3^2.cos^2(\theta) = T_2^2$$

Usando a equação fundamental da trigonometria:

$$T_3^2.(1 - sen^2(\theta)) = T_2^2 \Rightarrow sen(\theta) = \sqrt{1 - \frac{T_2^2}{T_3^2}}$$

Agora substituímos o $sen(\theta)$ na equação obtida pelo equilíbrio vertical:

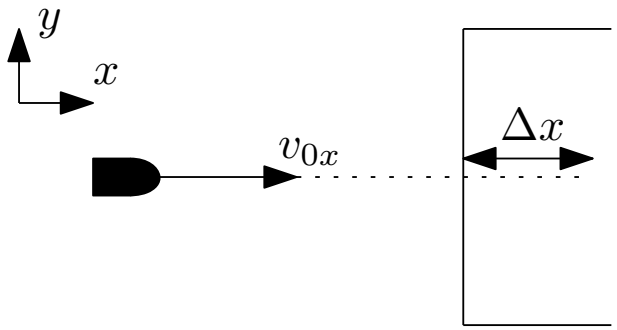
$$T_3.\sqrt{1 - \frac{T_2^2}{T_3^2}} - m_2.g = 0 \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{T_2^2}{T_3^2}} = \frac{m_2.g}{T_3} \Rightarrow 1 - \frac{T_2^2}{T_3^2} = \frac{m_2^2.g^2}{T_3^2} \Rightarrow T_3^2 = m_2^2.g^2 + T_2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_3 = \sqrt{m_2^2.g^2 + T_2^2} \Rightarrow T_3 = \sqrt{300^2.9,8^2 + 1697^2} = 3395\ N$$

Agora podemos determinar o ângulo θ com a equação obtida para o $sen(\theta)$:

$$\theta = arcsen\left(\sqrt{1 - \frac{T_2^2}{T_3^2}}\right) = arcsen\left(\sqrt{1 - \frac{1697^2}{3395^2}}\right) = 60^\circ$$

4.6 Munição penetrando em árvore



Sabemos as velocidades final e inicial e a distância percorrida pelo projétil, logo, com a equação de Torricelli, podemos calcular a sua aceleração (gerada pela árvore):

$$v_x^2 = v_{0x}^2 - 2.a_x.\Delta x \Rightarrow a_x = \frac{v_{0x}^2 - v_x^2}{2.\Delta x} = \frac{500^2 - 0^2}{2.0,1} = 1,25.10^6 \ \frac{m}{s^2}$$

Com a equação horária da velocidade, podemos calcular o tempo decorrido até o projétil ficar em repouso:

$$v_x = v_{0x} - a_x.t \Rightarrow t = \frac{v_{0x} - v_x}{a_x} = \frac{500 - 0}{1,25.10^6} = 4.10^{-}4 \ s = 0,4 \ ms$$

Agora, pela equação do impulso-momento linear, podemos encontrar a força média aplicada:

$$F_m.\Delta t = m.v_x - m_v 0x \Rightarrow F_m = \frac{20.10^{-3}.0 - 20.10^{-3}.500}{4.10^{-}4} = 25000 \ N = 2551 \ kgf$$

Existe outra forma de obter o mesmo resultado. Como?

4.7 Pulo de pulga

A pulga sai de $y = 1\ mm$ com velocidade tal que sua altura máxima é 50 cm. Com a equação de Torricelli, podemos determinar a velocidade vertical inicial.

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.g.\Delta y \Rightarrow v_{0y}^2 = v_y^2 + 2.g.\Delta y \Rightarrow v_{0y} = \sqrt{v_y^2 + 2.g.\Delta y} = \sqrt{0^2 + 2.9,8.(0,5 - 0,001)}$$

$$v_{0y} = 3,13\ \frac{m}{s}$$

Sabemos que esta velocidade é obtida quando a pulga se impulsiona por uma distância igual a 1 mm. Com isso, podemos, novamente com Torricelli, calcular a aceleração impressa pelas patas da pulga:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2.a_y.\Delta y \Rightarrow a_y = \frac{v_y^2 - v_{0y}^2}{2.\Delta y} = \frac{3,13^2 - 0^2}{2.0,001} = 4890\ \frac{m}{s^2}$$

Com a equação horária da velocidade vertical, podemos determinar quanto tempo, com esta aceleração, a pulga leva para atingir a velocidade:

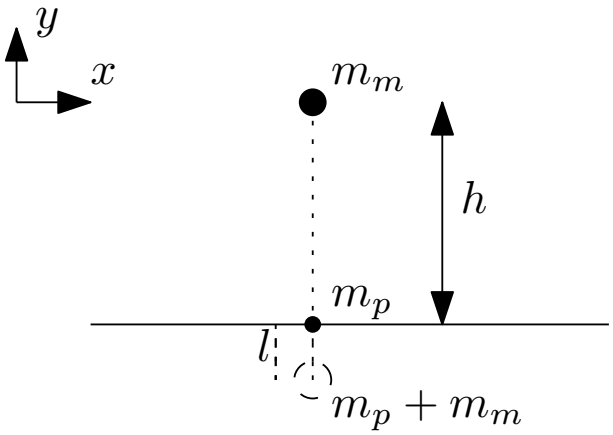
$$v_y = v_{0y} + a_y.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_y - v_{0y}}{a_y} = \frac{3,13 - 0}{4890} = 6,4.10^{-4}\ s = 0,64\ ms$$

Pela equação do impulso-momento linear, a força média exercida pela pulga sobre o chão é:

$$F_m.\Delta t = m.v_y - m.v_{0y} \Rightarrow F_m = \frac{m.v_y - m.v_{0y}}{\Delta t} = \frac{2.10^{-6}.3,13 - 2.10^{-6}.0}{6,4.10^{-4}} = 9,77.10^3\ N$$

Se dividirmos o valor encontrado pelo peso da pulga ($20.10^6.9,8\ N$), obteremos que esta força é quase 500 vezes o peso da pulga.

4.8 Queda do martelo



Se o martelo sai de h em queda livre e parte com velocidade nula, podemos calcular a velocidade com que chega no solo com a equação de Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2.g.\Delta y = 0^2 + 2.g.h \Rightarrow v_y = \sqrt{2.g.h}$$

Por conservação do momento linear, sabemos que após o encontro entre o martelo e o prego, deve valer:

$$m_m.v_y = (m_m + m_p).v \Rightarrow v = \frac{m_m}{m_m + m_p}.v_y = \frac{m_m}{m_m + m_p}.\sqrt{2.g.h}$$

Para que o conjunto martelo + prego entre em repouso após percorrer uma distância l, devemos ter a seguinte aceleração, dada por Torricelli:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.a_y.\Delta y \Rightarrow a_y = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2.\Delta y} = \frac{v^2 - 0^2}{2.l} = \left(\frac{m_m}{m_m + m_p}\right)^2.\frac{g.h}{l}$$

O tempo para que o conjunto entre em repouso, considerando a aceleração encontrada, é encontrado com a equação horária da velocidade:

$$v_y = v_{0y} - a_y.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{0y} - v_y}{a_y} = \frac{v - 0}{\frac{v^2 - 0^2}{2.l}} = \frac{2.l}{\frac{m_m}{m_m + m_p}.\sqrt{2.g.h}} = \frac{m_m + m_p}{m_m}.\sqrt{\frac{2}{g.h}}.l$$

Logo, pela equação do impulso-momento linear, podemos obter uma expressão para a força média sobre o prego:

$$F_m.\Delta t = (m_m + m_p).v_y - (m_m + m_p).v_{0y} \Rightarrow F_m = \frac{(m_m + m_p).v_y - (m_m + m_p).v_{0y}}{\Delta t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_m = \frac{(m_m + m_p).0 - (m_m + m_p).v}{\Delta t} = -\frac{m_m.\sqrt{2.g.h}}{\frac{m_m + m_p}{m_m}.\sqrt{\frac{2}{g.h}}.l} = -\frac{m_m^2.g.h}{m_m + m_p.l}$$

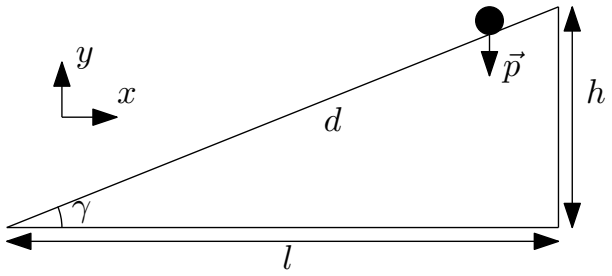
Uma consideração física muito importante deve ser feita agora: a massa do prega é praticamente inexistente se comparada à massa do martelo. Por conta disso, podemos dizer que $m_m + m_p \approx m_m$. Com isso, a força média passa a ser:

$$F_m = -\frac{m_m.g.h}{l}$$

Ao dividirmos isto pelo peso do martelo, obtemos:

$$\frac{F_m}{p_m} = -\frac{m_m.g.h}{l}.\frac{1}{m_m.g} = -\frac{h}{l}$$

4.9 Automóvel sem freio



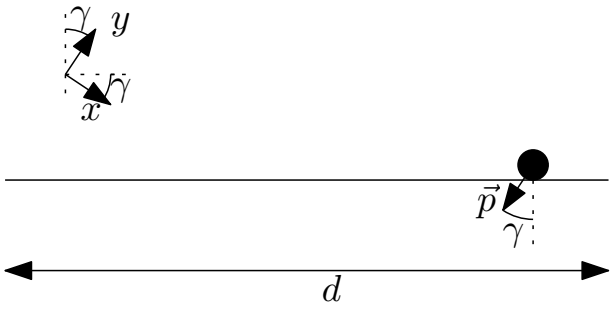
Como sabemos altura e comprimento da ladeira, podemos calcular seu ângulo de inclinação:

$$tg(\gamma) = \frac{h}{l} \Rightarrow \gamma = arctg\left(\frac{h}{l}\right) = arctg\left(\frac{25}{100}\right) = 14^\circ$$

E o comprimento da pista também pode ser calculado:

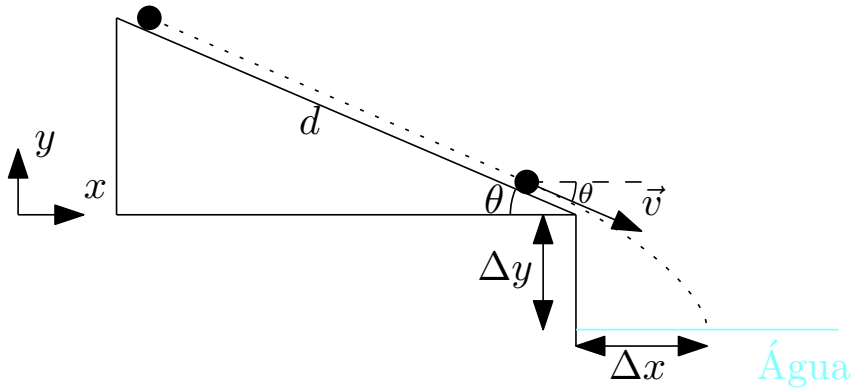
$$d^2 = h^2 + l^2 \Longrightarrow d = \sqrt{h^2 + l^2} = \sqrt{25^2 + 100^2} = 103\ m$$

Se girarmos todo o sistema por um ângulo γ no sentido horário, perceba que na direção da pista d surgira uma componente da gravidade, ela será nossa aceleração. Com Torricelli, podemos calcular a velocidade obtida no fim do trajeto por conta desta aceleração:



$$v_d^2 = v_{0d}^2 + 2.a_d.\Delta d \Rightarrow v_d = \sqrt{0^2 + 2.g.sen(\gamma).\Delta d} = \sqrt{2.9,8.sen(14^\circ).103} = 22\ \frac{m}{s} = 80\ \frac{km}{h}$$

4.10 Criança no escorregador



Podemos, assim como no Problema anterior*, rotacionar o sistema de coordenadas por um ângulo θ, mas dessa vez no sentido anti-horário. Com isso, verificamos que a aceleração do criança é $g.sen(\theta)$.

Como sabemos o comprimento do escorregador, podemos calcular, por Torricelli, a velocidade final da criança:

$$v_d^2 = v_{0d}^2 + 2.a_d.\Delta d \Rightarrow v_d = \sqrt{v_{0d}^2 + 2.a_d.\Delta d} = \sqrt{0^2 + 2.g.sen(\theta).\Delta d} = \sqrt{2.9,8.sen(30°).3} = 5,42\ \frac{m}{s}$$

Este é o módulo do vetor velocidade, portanto podemos calcular separadamente as componentes x e y deste vetor:

$$\vec{v} = v.cos(\theta)\ \hat{i} - v.sen(\theta)\ \hat{j} = 5,42.cos(30°)\ \hat{i} - 5,42.sen(30°)\ \hat{j} = 4,7\ \hat{i} - 2,7\ \hat{j}$$

(em $\frac{m}{s}$)

Podemos calcular o tempo decorrido até chegar na água calculando as raízes da equação horária da posição ou calculando a velocidade final com a equação de Torricelli e depois usando a equação horária da velocidade. Farei da primeira forma:

$$y = y_0 + v_y.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.g.t^2 - v_y.t + \Delta y = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}.9,8.t^2 - (-2,7).t + (-3-0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4,9.t^2 + 2,7.t - 3 = 0$$

Aplicando Bháskara:

$$t = \frac{-2,7 \pm \sqrt{2,7^2 + 4.4,9.3}}{2.4,9} = \frac{-2,7 \pm 8,1}{9,8}$$

Como tempo negativo não tem sentido físico, escolheremos a raíz positiva:

*Veja o problema 4.9.

$$t = \frac{-2,7 + 8,1}{9,8} = 0,55\ s$$

Agora, por fim, só temos que calcular o quanto a criança se desloca horizontalmente neste tempo. Pela equação horária da posição horizontal, obtemos:

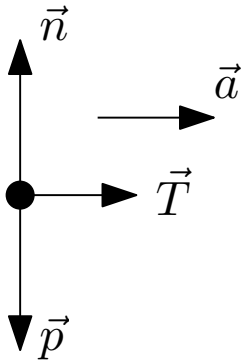
$$x = x_+ v_x.t = 0 + 4,7.0,55 \Rightarrow x = 2,6\ m$$

4.11 Corda com massa

Sabemos, pela Segunda Lei de Newton, que a soma das forças sobre um corpo deve ser igual ao produto da massa do corpo com a aceleração do mesmo. Logo, se pensarmos no corpo como sendo o conjunto bloco + corda[†], e sobre ele atuando uma força $\vec{F}$, obtemos:

$$\vec{F} = (m + M).\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{1}{m + M}.\vec{F}$$

Se olharmos apenas para o bloco, obteremos o seguinte diagrama de corpo livre:



Aplicando a Segunda Lei de Newton ao bloco apenas:

$$\vec{T} = M.\vec{a} = M.\frac{1}{m + M}.\vec{F} = \frac{M}{m + M}.\vec{F}$$

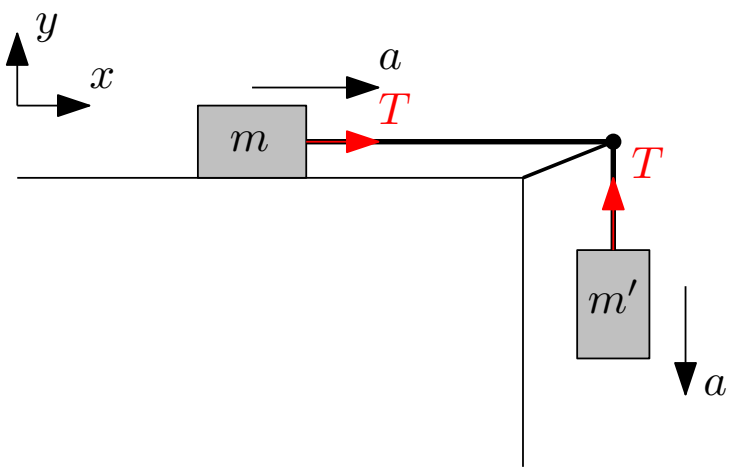
Se a massa m da corda for muito menor que a massa M do bloco, a razão $\frac{m}{M} \approx 0$. Para que essa razão apareça, podemos colocar M em evidência no denominador da equação anterior:

$$\vec{T} = \frac{M}{M.\left(\frac{m}{M} + 1\right)}.\vec{F} = \frac{1}{0 + 1}.\vec{F} \Rightarrow \vec{T} = \vec{F}$$

Como era de se esperar, no limite em que a massa da corda é desprezível, ela transmite toda a força aplicada para o bloco.

[†]Podemos fazer isso, pois os corpos estão vinculados (a corda está grudada ao bloco).

4.12 Disco sendo puxado por fio



a Aceleração do disco

Aplicando a Segunda Lei de Newton na vertical ao bloco de massa m', obtemos:

$$T - m'.g = -m'.a \Rightarrow T = -m'.a + m'.g$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton na horizontal ao disco de massa m:

$$T = m.a \Rightarrow -m'.a + m'.g = m.a \Rightarrow m'.g = m.a + m'.a = a.(m' + m) \Rightarrow a = \frac{m'}{m' + m}.g$$

Se $m' << m$ podemos dizer que $m' + m \approx m$, assim obtemos:

$$a \approx \frac{m'}{m}.g$$

b Tensão no fio

Como temos a solução para a aceleração, basta substituir o resultado na primeira equação em que isolamos a tensão T:

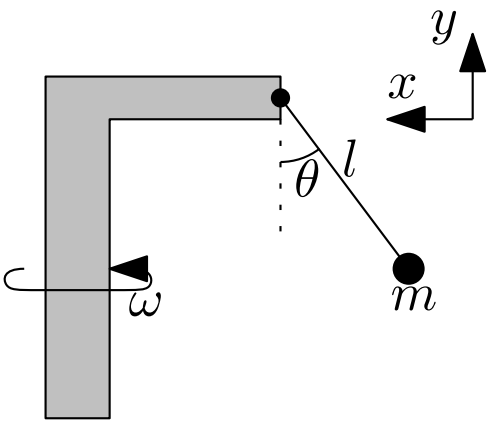
$$T = -m'.\frac{m'}{m' + m}.g + m'.g = m'.g.\left(1 - \frac{m'}{m' + m}\right) = m'.g.\left(\frac{m' + m - m'}{m' + m}\right) \Rightarrow$$

$$T = m'.g.\left(\frac{m}{m' + m}\right)$$

Caso $m' << m$, então $m' + m \approx m$, então

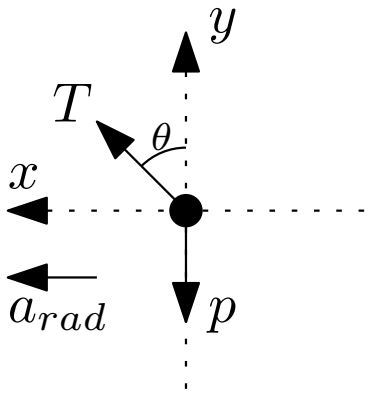
$$T \approx m'.g$$

4.13 Dispositivo girando em torno de eixo vertical



a Valor de ω

Observe que no eixo x, a força resultante sobre a massa deve fazer com que a ela gire em torno de um eixo fixo, ou seja, deve ser uma resultante centrípeta. Com um diagrama de corpo livre da massa, a Segunda Lei de Newton sendo aplicada em suas respectivas direções é:



- Na vertical:

$$T.cos(\theta) - m.g = 0$$

- Na horizontal:

$$T.sen(\theta) = m.a_{rad}$$

Pela condição de equilíbrio na vertical, podemos descobrir o valor da tensão no fio:

$$T.cos(\theta) = m.g \Rightarrow T = \frac{m.g}{cos(\theta)}$$

Substituindo na equação obtida na horizontal:

$$\frac{m.g}{cos(\theta)}.sen(\theta) = m.a_{rad} \Rightarrow m.g.tg(\theta) = m.a_{rad} \Rightarrow a_{rad} = g.tg(\theta)$$

Vamos trabalhar a aceleração radial separadamente:

$$a_{rad} = \frac{v^2}{r}$$

Como, a partir de um vínculo geométrico, temos que $v = \omega.r$, obtemos:

$$a_{rad} = \frac{\omega^2.r^2}{r} = \omega^2.r = \omega^2.(d + l.sen(\theta))$$

Substituindo na equação anterior:

$$\omega^2.(d + l.sen(\theta)) = g.tg(\theta) \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g.tg(\theta)}{d + l.sen(\theta)}}$$

b Tensão no fio

Para responder o item (a) precisamos calcular a tensão. A obtida foi:

$$T = \frac{m.g}{cos(\theta)}$$

CAPÍTULO

5

APLICAÇÕES DAS LEIS DE NEWTON

"Se vi mais longe foi por estar sobre ombros de gigantes. Nenhuma grande descoberta foi feita por um só homem; construímos sobre o trabalho dos que vieram antes de nós, e a verdade é um tesouro comum da humanidade."

Isaac Newton

5.1 Astronauta pulando

A aceleração da gravidade gerada por um corpo celeste é dada pela equação da gravitação universal de Newton:

$$m.g = \frac{G.m.M}{R^2} \Rightarrow g = \frac{G.M}{R^2}$$

Como a densidade é $\rho = \frac{M}{V}$, podemos expressar a aceleração da gravidade em função da densidade do corpo celeste:

$$g = \frac{G.\rho.V}{R^2} = \frac{G.\rho.\frac{4}{3}.\pi.R^3}{R^2} = \frac{4.\pi}{3}.G.\rho.R$$

Perceba que $\frac{g}{\rho.R}$ é uma constante, já que, pela equação, deve valer $\frac{4.\pi.G}{3}$. Por conta disso, podemos relacionar a aceleração da gravidade da Terra com a da Lua:

$$\frac{g}{\rho.R} = cte \Rightarrow \frac{g_T}{\rho_T.R_T} = \frac{g_L}{\rho_L.R_L} \Rightarrow g_L = \frac{\rho_L.R_L}{\rho_T.R_T}.g_T$$

Com isso, já podemos calcular a altura atingida na Lua. Pela Equação de Torricelli, temos:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.g_L.\Delta y_L \Rightarrow \Delta y_L = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2.g_L}$$

Substituindo a expressão obtida para a aceleração da gravidade da Lua:

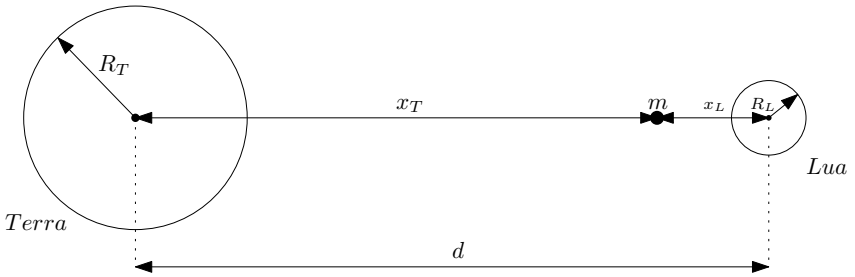
$$\Delta y_L = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2.\frac{\rho_L.R_L}{\rho_T.R_T}.g_T} = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2.g_T}.\frac{\rho_T.R_T}{\rho_L.R_L}$$

Perceba que a primeira fração é exatamente a altura atingida pelo astronauta na Terra*. Logo, teremos:

$$\Delta y_L = \Delta y_T.\frac{\rho_T.R_T}{\rho_L.R_L} = 0,6.\frac{5,52.6371}{3,34.1738} = 3,6\ m$$

*Como podemos verificar isso?

5.2 Pontos de Lagrange



Os pontos de Lagrange são pontos no espaço em que a força gravitacional gerada por dois corpos é nula. No caso do sistema Terra-Lua, queremos que o corpo de massa m esteja em equilíbrio, portanto:

$$F_T - F_L = 0$$

Como a distância entre os corpos é constante, vale que $x_T + x_L = d$, em que d é a distância Terra-Lua. Desenvolvendo a equação do equilíbrio:

$$\frac{G.M_T.m}{x_T^2} - \frac{G.M_L.m}{x_L^2} = 0 \Rightarrow \frac{M_T}{x_T^2} - \frac{M_L}{x_L^2} = 0 \Rightarrow \frac{\rho_T.V_T}{x_T^2} - \frac{\rho_L.V_L}{x_L^2} = \frac{\rho_T.\frac{4}{3}.\pi.R_T^3}{x_T^2} - \frac{\rho_L.\frac{4}{3}.\pi.R_L^3}{x_L^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho_T.R_T^3}{x_T^2} - \frac{\rho_L.R_L^3}{x_L^2} = 0 \Rightarrow \rho_T.R_T^3.x_L^2 = \rho_L.R_L^3.x_T^2 \Rightarrow \left(\frac{x_T}{x_L}\right)^2 = \frac{\rho_T.R_T^3}{\rho_L.R_L^3}$$

Agora podemos reescrever x_T como sendo $d - X_L$, obtemos então:

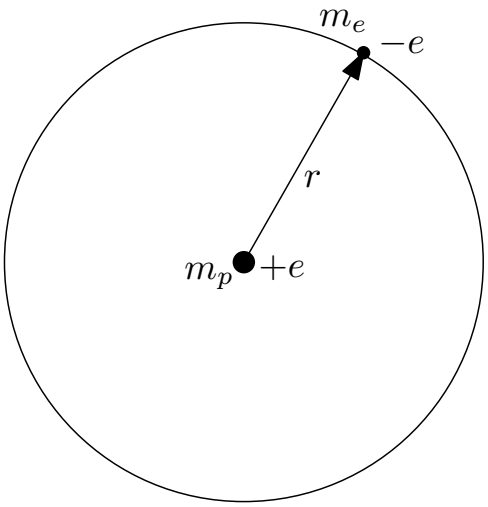
$$\frac{d - x_L}{x_L} = \sqrt{\frac{\rho_T.R_T^3}{\rho_L.R_L^3}} \Rightarrow \frac{d}{x_L} = \sqrt{\frac{\rho_T.R_T^3}{\rho_L.R_L^3}} + 1 = \frac{\sqrt{\rho_T.R_T^3} + \sqrt{\rho_L.R_L^3}}{\sqrt{\rho_L.R_L^3}}$$

O que nos interessa, na verdade, é a razão inversa da que obtemos:

$$\frac{x_L}{d} = \frac{\sqrt{\rho_L.R_L^3}}{\sqrt{\rho_T.R_T^3} + \sqrt{\rho_L.R_L^3}} = \frac{\sqrt{3,34.1738^3}}{\sqrt{5,52.6371^3} + \sqrt{3,34.1738^3}} = 0,1$$

Ou seja, a distância da massa m até a Lua para que ela esteja em equilíbrio é 10% da distância total Terra-Lua. Logo, a distância da massa até a Terra é 90% da distância Terra-Lua.

5.3 Átomo de Hidrogênio



Como a carga do elétron e do próton é a mesma (em módulo), a força Coulombiana é sobre o elétron é:

$$F_c = \frac{k.e^2}{r^2}$$

A gravitacional, por sua vez, é:

$$F_g = \frac{G.m_e.m_p}{r^2}$$

Com isso, a razão entre as forças é:

$$\frac{F_c}{F_g} = \frac{\frac{k.e^2}{r^2}}{\frac{G.m_e.m_p}{r^2}} = \frac{k.e^2}{G.m_e.m_p} = \frac{9.10^9.(1,6.10^{-19})^2}{6,67.10^{-11}.9,11.10^{-31}.1,67.10^{-27}} = 2,27.10^{39}$$

Considerando que, no átomo, a distância entre o elétron e o próton é r, queremos saber a distância d tal que $F_c(d) = F_g(r)$, ou seja:

$$\frac{G.m_e.m_p}{r^2} = \frac{k.e^2}{d^2} \Rightarrow d^2 = \frac{k.e^2}{G.m_e.m_p}.r^2 \Rightarrow d = e.\sqrt{\frac{k}{G.m_e.m_p}}.r \Rightarrow$$

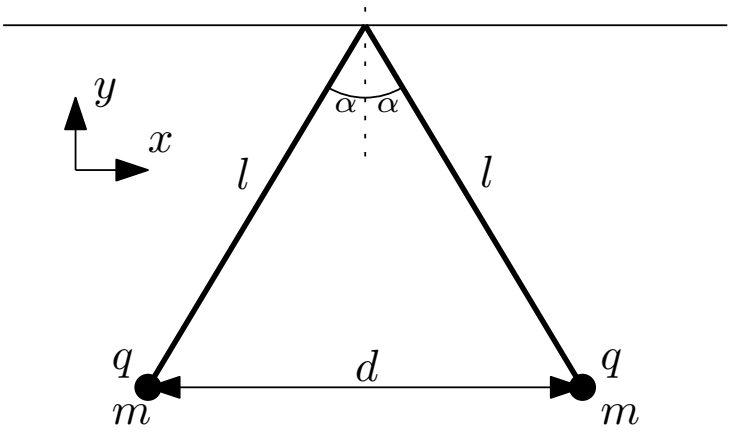
$$\Rightarrow d = 1,6.10^{-19}.\sqrt{\frac{9.10^9}{6,67.10^{-11}.9,11.10^{-31}.1,67.10^{-27}}}.0,5.10^{-10} = 2,38.10^9 \ m$$

Considerando a distância Terra-Lua ($d_{T/L}$) como sendo $384,4.10^6$ m, a distância d obtida é, portanto:

$$d = 6,2.d_{T/L}$$

Com esse resultado, podemos ver como a força elétrica é absurdamente maior que a força gravitacional para corpos com massas pequenas.

5.4 Bolinhas eletrizadas em equilíbrio



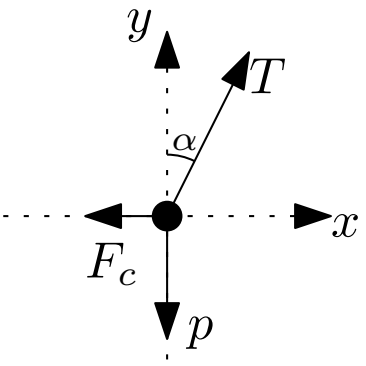
Como as bolinhas são iguais e os comprimentos dos fios também, o ângulo que cada uma faz com a vertical deve ser o mesmo. Portanto:

$$2.\alpha = 60^\circ \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

Calculando o seno do ângulo α, podemos descobrir a distância d entre as bolinhas:

$$sen(\alpha) = \frac{\frac{d}{2}}{l} \Rightarrow d = 2.l.sen(\alpha)$$

Como sabemos que as bolinhas estão em equilíbrio, podemos desenhar o diagrama de corpo livre para uma das duas e aplicar as condições de equilíbrio em cada direção.



Aplicando as condições de equilíbrio:

- Na vertical

$$T.cos(\alpha) - p = T.cos(\alpha) - m.g = 0$$

- Na horizontal

$$T.sen(\alpha) - F_c = T.sen(\alpha) - \frac{k.q^2}{d^2} = 0$$

Com a equação do equilíbrio vertical, podemos calcular a tensão na corda:

$$T = \frac{m.g}{cos(\alpha)}$$

Substituindo esta expressão na equação do equilíbrio horizontal, podemos isolar a quantidade de carga q, que é o que queremos descobrir:

$$\frac{m.g}{cos(\alpha)}.sen(\alpha) - \frac{k.q^2}{d^2} = 0$$

Substituindo também a expressão encontrada para a distância d:

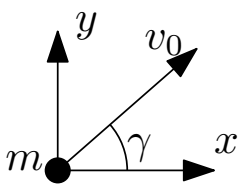
$$\frac{m.g}{cos(\alpha)}.sen(\alpha) - \frac{k.q^2}{(2.l.sen(\alpha))^2} = 0 \Rightarrow m.g.tg(\alpha) = \frac{k.q^2}{(2.l.sen(\alpha))^2} \Rightarrow q^2 = m.g.tg(\alpha).\frac{(2.l.sen(\alpha))^2}{k}$$

Como podemos ter cargas positivas (retirar elétrons do corpo) ou negativas (adicionar elétrons ao corpo), as soluções positiva e negativa para q têm sentido físico.

$$q = \pm\sqrt{\frac{m.g.tg(\alpha)}{k}}.2.l.sen(\alpha) = \pm\sqrt{\frac{0,5.10^{-3}.9,8.tg(30^{\circ})}{9.10^{9}}}.2.0,3.sen(30^{\circ}) = \pm 1,68.10^{-7}\ C$$

5.5 Lançamento com resistência do ar

Considerando um lançamento sobre um ângulo γ e com velocidade inicial dada pelo vetor:



$$\vec{v_0} = v_{0x}\ \hat{i} + v_{0y}\ \hat{j} = v_0.cos(\gamma)\ \hat{i} + v_0.sen(\gamma)\ \hat{j}$$

Podemos descrever a dinâmica do problema partindo das Leis de Newton. Aplicando a Segunda Lei de Newton à horizontal, obtemos:

$$-b.v_x = m.a_x \Rightarrow -b.v_x = m.\frac{d\ v_x}{dx} \Rightarrow \frac{d\ v_x}{dt} = -\frac{b}{m}.v_x \Rightarrow \frac{d\ v_x}{v_x} = -\frac{b}{m}\ dt$$

Para $t = 0\ s$, nossa velocidade horizontal deve ser a velocidade horizontal inicial, ou seja, v_{0x}. E para um tempo arbitrário t, teremos uma velocidade $v_x(t)$. Então, obtemos:

$$\int_{v_{0x}}^{v_x(t)} \frac{dv_x}{v_x} = -\int_0^t \frac{b}{m}\ dt \Rightarrow ln\left(\frac{v_x(t)}{v_{0x}}\right) = -\frac{b}{m}.t \Rightarrow v_x(t) = v_{0x}.e^{-\frac{b}{m}.t} = v_0.cos(\gamma).e^{-\frac{b}{m}.t}$$

Para a vertical, teremos algo semelhante, porém agora surgirá um termo constante devido a aceleração da gravidade. Aplicando a Segunda Lei de Newton à vertical, obtemos:

$$-b.v_y - m.g = m.a_y \Rightarrow -b.v_y - m.g = m.\frac{d\ v_y}{dt} \Rightarrow \frac{d\ v_y}{dt} = -\frac{b}{m}.v_y - g \Rightarrow \frac{d\ v_y}{\frac{b}{m}.v_y + g} = -dt$$

Vamos chamar todo o termo $\frac{b}{m}.v_y + g$ de Ω. Portanto:

$$\frac{d\Omega}{d\ v_y} = \frac{b}{m} \Rightarrow d\ v_y = \frac{m}{b}\ d\Omega$$

Substituindo na nossa equação diferencial, obtemos:

$$\frac{d\Omega}{\Omega} = -\frac{b}{m}\ dt$$

Quando $t = 0\ s$, nosso Ω vale $\frac{b}{m}.v_{0y} + g$ e para um tempo arbitrário t, teremos Ω valendo $\frac{b}{m}.v_y(t) + g$. Então, teremos:

$$\int_{\frac{b}{m}.v_{0y}+g}^{\frac{b}{m}.v_y(t)+g} \frac{d\Omega}{\Omega} = -\int_0^t \frac{b}{m}\ dt \Rightarrow ln\left(\frac{\frac{b}{m}.v_y(t) + g}{\frac{b}{m}.v_{0y} + g}\right) = -\frac{b}{m}.t$$

Teremos mais trabalho para isolar a velocidade $v_y(t)$, mas é algo simples. Obtemos assim:

$$v_y(t) = \frac{m}{b}.\left[\left(\frac{b}{m}.v_{0y} + g\right).e^{-\frac{b}{m}.t} - g\right] = v_0.sen(\gamma).e^{-\frac{b}{m}.t} + \frac{m}{b}.g.\left(e^{-\frac{b}{m}.t} - 1\right)$$

No nosso problema, $\gamma = 90°$, ou seja, não há movimento horizontal. Portanto, teremos que trabalhar apenas com a equação $v_y(t)$, que, ao substituirmos o ângulo, ficará apenas:

$$v_y(t) = v_0.e^{-\frac{b}{m}.t} + \frac{m}{b}.g.\left(e^{-\frac{b}{m}.t} - 1\right)$$

Para descobrir a função posição vertical da partícula, podemos integrar a função velocidade:

$$y(t)-y(0) = \int_0^t \left[v_0.e^{-\frac{b}{m}.t}+\frac{m}{b}.g.\left(e^{-\frac{b}{m}.t}-1\right)\right] dt = \int_0^t v_0.e^{-\frac{b}{m}.t}\,dt+\int_0^t \frac{m}{b}.g.e^{-\frac{b}{m}.t}\,dt-\int_0^t \frac{m}{b}.g\,dt$$

Considerando que partimos de uma altura inicial igual a h, temos que $y(0) = h$. Obtendo assim:

$$y(t) - h = \left(v_0 + \frac{m}{b}.g\right).\int_0^t e^{-\frac{b}{m}.t}\,dt - \int_0^t \frac{m}{b}.g\,dt$$

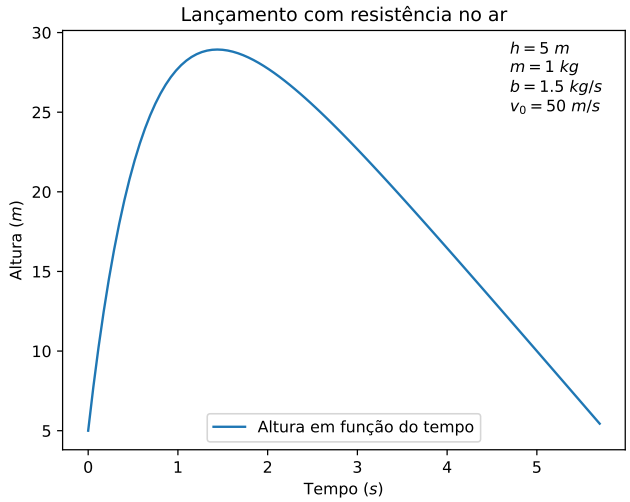
A primeira integral pode ser resolvida fazendo uma substituição do expoente da exponencial e a segunda integral é mais simples ainda:

$$y(t)-h = \left(v_0+\frac{m}{b}.g\right).\frac{-m}{b}.\left(e^{-\frac{b}{m}.t}-1\right) - \frac{m}{b}.g.t = \frac{m}{b}.\left(v_0+\frac{m}{b}.g\right).\left(1-e^{-\frac{b}{m}.t}\right) - \frac{m}{b}.g.t$$

Com isso, obtemos o comportamento temporal da posição em y da partícula:

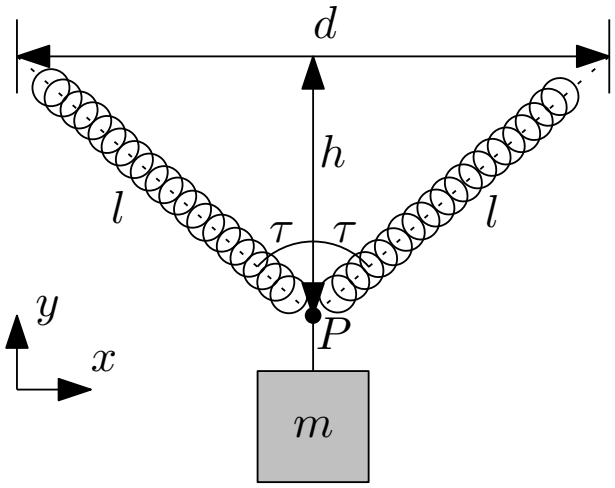
$$y(t) = h + \frac{m}{b}.\left(v_0 + \frac{m}{b}.g\right) - \frac{m}{b}.\left(v_0 + \frac{m}{b}.g\right).e^{-\frac{b}{m}.t} - \frac{m}{b}.g.t$$

Plotando o gráfico dessa função com valores arbitrários para as constantes, percebemos algo interessante:



Perceba que o pedregulho vai de h até a altura máxima muito mais rápido do que vem da altura máxima até a altura inicial h. Portanto, o pedregulho demora mais tempo para voltar do que para ir.

5.6 Corpo em equilíbrio com molas



Como sabemos os valores de h e d, podemos determinar o atual tamanho das molas. Por Pitágoras:

$$l^2 = h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow l = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}$$

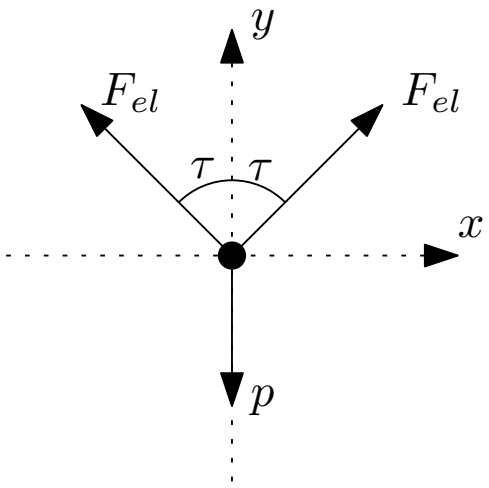
Portanto, a variação do comprimento da mola (que é oque importa para o cálculo da força elástica) é:

$$\Delta l = l - l_0 = \sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} - l_0$$

Podemos também calcular o ângulo τ em função dos parâmetros l, h e d. Vamos calcular diretamente o seno e o cosseno deste ângulo, assim teremos menos trabalho:

$$cos(\tau) = \frac{h}{l} = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}}$$

$$sen(\tau) = \frac{d}{2.l} = \frac{d}{\sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}}$$



Como sabemos que o corpo está em equilíbrio, podemos montar seu diagrama de corpo livre e aplicar a condição de equilíbrio nas direções horizontal e vertical.

- Na horizontal

$$F_{el}.sen(\tau) - F_{el}.sen(\tau) = 0$$

- Na vertical

$$f_{el}.cos(\tau) + F_{el}.cos(\tau) - m.g = 0$$

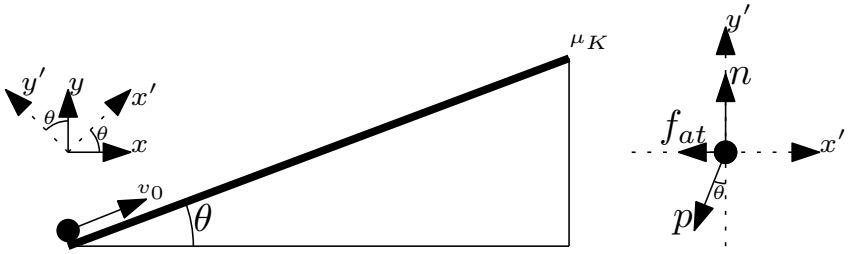
Perceba que a equação para o equilíbrio horizontal não nos dá nada de interessante. Porém, a equação do equilíbrio vertical nos dá. Vamos abrir as contas:

$$2.F_{el}.cos(\tau) = m.g \Rightarrow 2.K.\Delta l.cos(\tau) = m.g \Rightarrow 2.K.\left(\sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} - l_0\right)\frac{h}{\sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}} = m.g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{m.g}{2}.\frac{\sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}}}{h.\left(\sqrt{h^2 + \frac{d^2}{4}} - l_0\right)} = \frac{1.9,8}{2}.\frac{\sqrt{0,15^2 + \frac{1^2}{4}}}{0,15.\left(\sqrt{0,15^2 + \frac{1^2}{4}} - 0,5\right)} = 775\ \frac{N}{m}$$

5.7 Bloco lançado em plano inclinado

Podemos definir nosso sistema de coordenadas rotacionado em θ no sentido anti-horário em relação ao sistema de coordenadas convencional, isso facilitará a análise do problema. Então o sistema e o diagrama de corpo livre ficam:



a Distância máxima

Na coordenada y', o sistema está em equilíbrio, e na coordenada x' temos movimento. Pelas equações de Newton, podemos determinar as equações.

- Em x'

$$-m.g.sen(\theta) - f_{at} = m.a$$

- Em y'

$$n - m.g.cos(\theta) = 0$$

Lembre que a força de atrito f_{at} depende da força normal à superfície. Por isso, vamos isolar n na equação do equilíbrio na direção y':

$$n = m.g.cos(\theta)$$

Substituindo o resultado na equação da direção x', obtemos a aceleração da partícula:

$$-m.g.sen(\theta) - \mu_k.n = m.a \Rightarrow -m.g.sen(\theta) - \mu_k.m.g.cos(\theta) = m.a \Rightarrow a = -g.(sen(\theta) + \mu_K.cos(\theta))$$

Por Torricelli, podemos descobrir a distância máxima percorrida no plano aplicando a condição de velocidade final nula:

$$v_{x'}^2 = v_{0x'}^2 + 2.a_{x'}.\Delta x' \Rightarrow \Delta x' = \frac{v_{x'}^2 - v_{0x'}^2}{2.a_{x'}} = \frac{0^2 - v_0^2}{2.(-g.[sen(\theta) + \mu_K.cos(\theta)])} = \frac{v_0^2}{2.g.(sen(\theta) + \mu_K.cos(\theta))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x' - x'_0 = x' - 0 = x' = \frac{5^2}{2.9,8.(sen(45°) + 0,3.cos(45°))} = 1,39\ m$$

b Tempo de subida

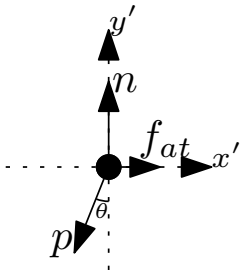
Como sabemos o as velocidades final e inicial, e a aceleração, podemos descobrir o tempo que o bloco leva para subir. Pela equação horária das velocidades, obtemos:

$$v_{x'} = v_{0x'} + a_{x'}.\Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{v_{x'} - v_{0x'}}{a_{x'}} = \frac{0 - v_0}{-g.(sen(\theta) + \mu_K.cos(\theta))} = \frac{v_0}{g.(sen(\theta) + \mu_K.cos(\theta))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{5}{9,8.(sen(45°) + 0,3.cos(45°))} = 0,56\ s$$

c Tempo de descida

Como o atrito é sempre contrário à tendencia do movimento, a aceleração na descida mudará. O novo diagrama de corpo livre é:



Perceba que nada se altera em y'. Porém, em x', a nova equação é:

$$f_{at} - m.g.sen(\theta) = m.a \Rightarrow \mu_K.n - m.g.sen(\theta) = m.a$$

$$\mu_K.m.g.cos(\theta) - m.g.sen(\theta) = m.a$$

$$a = \mu_K.g.cos(\theta) - g.sen(\theta) = g.(\mu_K.cos(\theta) - sen(\theta))$$

Como sabemos a quantidade $\Delta x'$ que a partícula irá variar para chegar novamente à base, e sabemos velocidade inicial e aceleração, podemos usar a função horária da posição para determinar o tempo de descida:

$$x' = x'_0 + v_{0x'}.t + \frac{1}{2}.a_{x'}.t^2 \Rightarrow \Delta x' = 0.t + \frac{1}{2}.g.(\mu_K.cos(\theta) - sen(\theta)).t^2 = \frac{1}{2}.g.(\mu_K.cos(\theta) - sen(\theta)).t^2 \Rightarrow$$

$$t = \sqrt{\frac{2.\Delta x'}{g.(\mu_K.cos(\theta) - sen(\theta))}} = \sqrt{\frac{2.(0 - 1,39)}{9,8.(0,3.cos(45°) - sen(45°))}} = 0,76\ s$$

d Velocidade final

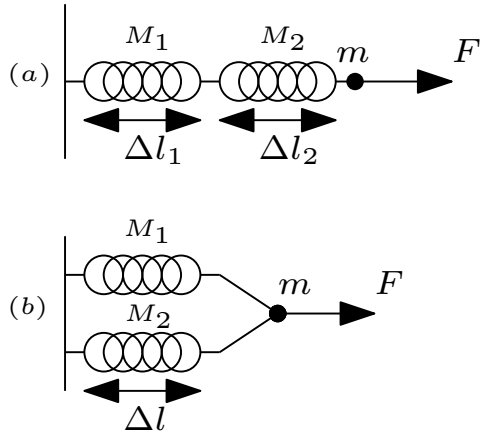
Sabemos que no ponto de máximo a velocidade é nula, sabemos a aceleração na descida e o tempo de descida. Logo, pela função horária da velocidade na direção x', podemos determinar a velocidade final:

$$v_{x'} = v_{0x'} + a_{x'}.t = 0 + g.(\mu_K.cos(\theta) - sen(\theta)).t = 9,8.(0,3.cos(45°) - sen(45°)).0,76 = -3,67\ \frac{m}{s}$$

O menos surge indicando que a velocidade apontará no sentido negativo do eixo x'. Portanto, se considerarmos apenas o módulo:

$$|v_{x'}| = 3,67\ \frac{m}{s}$$

5.8 Associação de molas



a Molas em série

Se as molas 1 e 2 esticam, respectivamente, até um comprimento l_1 e l_2, a variação total do comprimento é:

$$\Delta l = (l_1 + l_2) - (l_0 + l_0) = \Delta l_1 + \Delta l_2$$

- Para a mola M_1, temos

$$F_1 = -k_1.\Delta l_1$$

- Para a mola M_2, teremos algo parecido

$$F_2 = -k_2.\Delta l_2$$

- E para uma mola resultante com constante de mola k, teríamos

$$F = -k.\Delta l$$

Como sabemos a relação entre os comprimentos, podemos isolar as variações de comprimento e substituir na nossa equação que envolve apenas as variações de comprimento, obtemos assim:

$$-\frac{F_1}{k_1} - \frac{F_2}{k_2} = -\frac{F}{k} \Rightarrow \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2} = \frac{F}{k} \Rightarrow \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{1}{k}$$

b Molas em paralelo

Para uma associação de molas em paralelo, os comprimentos esticados são iguais entre, si. O que implica em:

$$\Delta l = \Delta l_1 = \Delta l_2$$

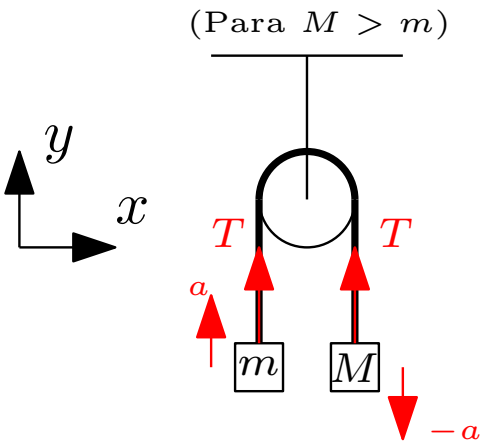
Como ambas as molas atuam sobre a massa m, o vínculo que temos agora é para as forças. Vale que:

$$F_1 + F_2 = F$$

Para cada mola, teremos sua respectiva força já calculada no item (a). Substituindo-a, obtemos:

$$(-k_1.\Delta l_1) + (-k_2.\Delta l_2) = -k.\Delta l \Rightarrow k_1.\Delta l + k_2.\Delta l = k.\Delta l \Rightarrow k_1 + k_2 = k$$

5.9 Máquina de Atwood



Perceba que não há interações horizontais, logo nos limitaremos a descrever a dinâmica de ambas as massas na direção vertical.
Podemos considerar $M > m$ ou $m > M$, o importante de verdade é seguir o eixo de coordenadas escolhido.
Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

- Massa m

$$T - m.g = m.a$$

- Massa M

$$T - M.g = -M.a$$

Isolando a tensão T da equação da massa m, obtemos:

$$T = m.a + m.g$$

Substituindo na equação da massa M:

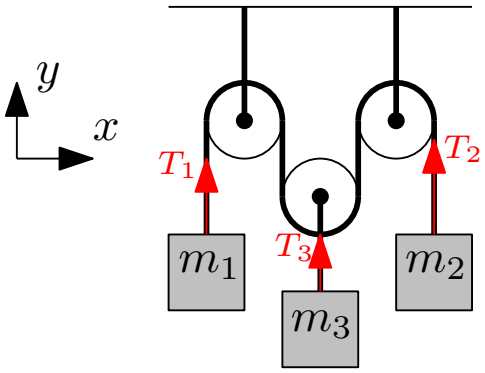
$$m.a + m.g - M.g = -M.a \Rightarrow M.a + m.a = M.g - m.g \Rightarrow a = \frac{M-m}{M+m}.g$$

Como já temos uma equação para a aceleração que só depende das massas, podemos substituí-la na equação da tensão e descobri-la:

$$T = m.\frac{M-m}{M+m}.g + m.g = \frac{M.m}{M+m}.g - \frac{m^2}{M+m}.g + m.g = \frac{M.m}{M+m}.g - \frac{m^2}{M+m}.g + m.g.\frac{M+m}{M+m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{M.m}{M+m}.g - \frac{m^2}{M+m}.g + \frac{M.m}{M+m}.g + \frac{m^2}{M+m}.g = \frac{2.M.m}{M+m}.g$$

5.10 Sistema de polias



Como a corda liga m_1 à m_2, a tensão aplicada nos dois pontos é a mesma, ou seja

$$T_1 = T_2 = T$$

Já para o corpo m_3, perceba que a tensão T_3 é gerada por duas tensões T que estão puxando a polia para cima. Logo:

$$T_3 = T_1 + T_2 = T + T = 2.T$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada massa:

- Para m_1

$$T - m_1.g = m_1.a_1$$

- Para m_2

$$T - m_2.g = m_2.a_2$$

- Por fim, para m_3

$$T_3 - m_3.g = m_3.a_3 \Rightarrow 2.T - m_3.g = m_3.a_3$$

Como o comprimento da corda não muda de tamanho, teremos um vínculo geométrico. Ele existe unicamente por conta da conexão entre as massas pela corda inextensível:

$$y_1 + y_2 + 2.y_3 = cte$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, obtemos outras relações importantes:

$$v_1 + v_2 + 2.v_3 = 0$$

$$a_1 + a_2 + 2.a_3 = 0$$

Então, naturalmente, podemos isolar variáveis obtidas com as equações das Leis de Newton e substituir nestas equações de vínculos. Isolando todas as acelerações obtidas nas equações de Newton e substituindo no vínculo de aceleração, obtemos a tensão T da corda:

$$\frac{T - m_1.g}{m_1} + \frac{T - m_2.g}{m_2} + 2.\left(\frac{2.T - m_3.g}{m_3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{T}{m_1} - g + \frac{T}{m_2} - g + 4.\frac{T}{m_3} - 2.g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T}{m_1} + \frac{T}{m_2} + 4.\frac{T}{m_3} = 4.g \Rightarrow T.\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}\right) = 4.g \Rightarrow T = \frac{4.g}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{4}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{4}{m_3}}.g = \frac{4.m_1.m_2.m_3}{4.m_1.m_2 + m_2.m_3 + m_3.m_1}.g = \frac{4.1.3.2}{4.1.3 + 3.2 + 2.1}.g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{24}{20}.g = \frac{6}{5}.g$$

Em posse do valor da tensão, podemos substituir a tensão T nas equações obtidas através da Segunda Lei de Newton e descobrir as acelerações:

- Para m_1

$$a_1 = \frac{T - m_1.g}{m_1} = \frac{\frac{6}{5}.g - 1.g}{1} = \frac{6}{5}.g - g = \frac{1}{5}.g$$

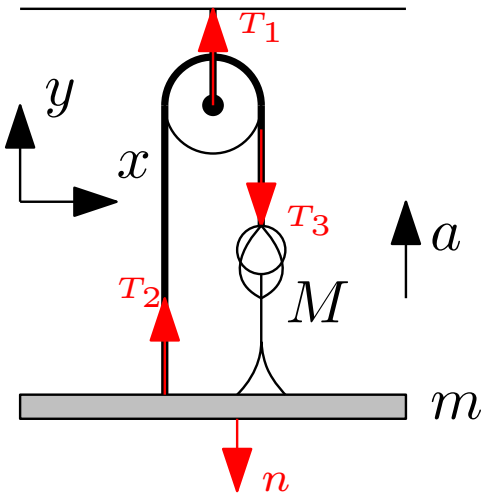
- Para m_2

$$a_2 = \frac{T - m_2.g}{m_2} = \frac{\frac{6}{5}.g - 3.g}{3} = \frac{2}{5}.g - g = -\frac{3}{5}.g$$

- Finalmente, para m_3

$$a_3 = \frac{2.T - m_3.g}{m_3} = \frac{2.\frac{6}{5}.g - 2.g}{2} = \frac{6}{5}.g - g = \frac{1}{5}.g$$

5.11 Pintor sobre uma plataforma



Logo de início devemos perceber que as cordas 2 e 3 na verdade são uma única corda. Portanto:

$$T_2 = T_3$$

A tensão T_1 (que, por simetria, deve ser o dobro de T_2) deve ser tal que gere uma aceleração $\frac{g}{4}$ no conjunto pintor+plataforma. Pela Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$T_1 - M.g - m.g = (m + M).a$$

$$T_1 = (m+M).a+(m+M).g = (m+M).\frac{g}{4}+(m+M).g$$

$$T_1 = \frac{5}{4}.(m + M).g = \frac{5}{4}.(40 + 80).9,8 = 1470$$

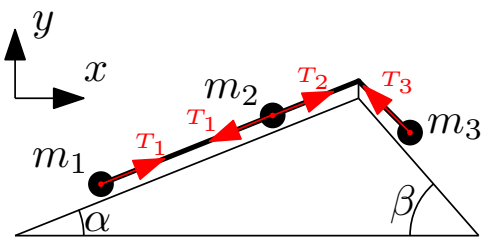
Consequentemente, as tensões T_2 e T_3 são:

$$T_2 = T_3 = \frac{T_1}{2} = \frac{1470}{2} = 735\ N$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton diretamente à plataforma, podemos determinar o valor da força normal exercida pelo homem:

$$T_2 - n - m.g = m.a \Rightarrow n = T_2 - m.(a+g) = T_2 - m.\left(\frac{g}{4}+g\right) = T_2 - \frac{5}{4}.m.g = 735 - \frac{5}{4}.40.9,8 = 245\ N$$

5.12 Massas ligadas por fio nos lados de um triângulo



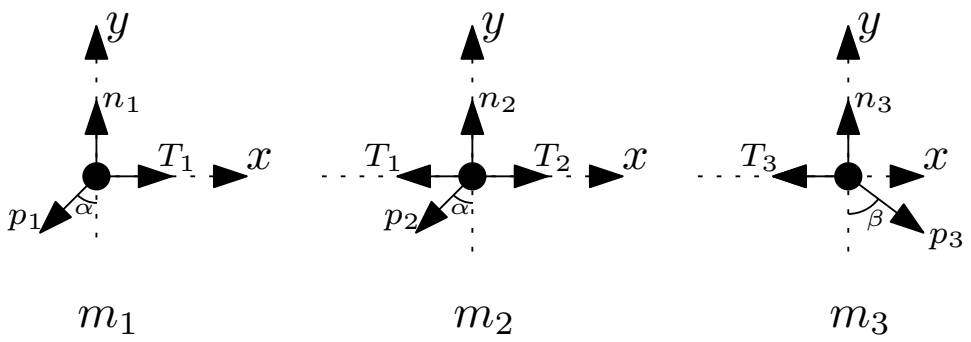
Como os 3 blocos estão ligados em série pelo mesmo fio, a aceleração de todos deve ser a mesma:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

Perceba também que a corda ligada ao corpo 2 e 3 é a mesma, por conta disso:

$$T_2 = T_3 = T$$

Podemos fazer um diagrama do corpo livre para cada corpo, isso facilitará a visualização.



Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada um, no sentido do plano (eixo x nos diagramas de corpo livre), obtemos:

- Para m_1

$$T_1 - m_1.g.sen(\alpha) = m_1.a$$

- Para m_2

$$T_2 - T_1 - m_2.g.sen(\alpha) = m_2.a \Rightarrow T - T_1 - m_2.g.sen(\alpha) = m_2.a$$

- Por fim, para m_3

$$m_3.g.sen(\beta) - T_3 = m_3.a \Rightarrow m_3.g.sen(\beta) - T = m_3.a$$

Da equação de m_1, podemos isolar a tensão T_1, e da equação de m_3 podemos isolar a tensão T. Ambas as variáveis podem ser substituídas na equação de m_2, assim poderemos descobrir a aceleração das massas.

A tensão T_1:

$$T_1 = m_1.a + m_1.g.sen(\alpha)$$

A tensão T:

$$T = m_3.g.sen(\beta) - m_3.a$$

Substituindo na equação de m_2:

$$\Big(m_3.g.sen(\beta) - m_3.a\Big) - \Big(m_1.a + m_1.g.sen(\alpha)\Big) - m_2.g.sen(\alpha) = m_2.a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_3.g.sen(\beta) - m_1.g.sen(\alpha) - m_2.g.sen(\alpha) = m_1.a + m_2.a + m_3.a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{m_3.g.sen(\beta) - m_1.g.sen(\alpha) - m_2.g.sen(\alpha)}{m_1 + m_2 + m_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{60.9,8.sen(60°) - 20.9,8.sen(30°) - 40.9,8.sen(30°)}{20 + 40 + 60} = 1,79\ \frac{m}{s^2}$$

Como já temos a aceleração, basta substitui-la nas equações obtidas com as Leis de Newton e isolar a tensão desejada.

- Tensão T

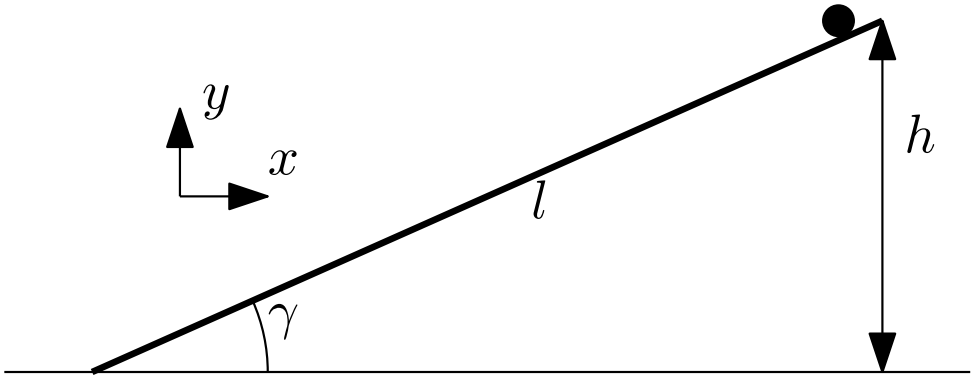
$$T = m_3.g.sen(\beta) - m_3.a = 60.9,8.sen(60°) - 60.1,79 = 402\ N$$

  Lembre que $T_2 = T_3 = T$.

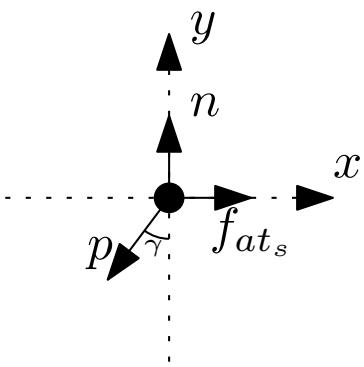
- Finalmente, T_1

$$T_1 = m_1.a + m_1.g.sen(\alpha) = 20.1,79 + 20.9,8.sen(30°) = 134\ N$$

5.13 Bloco deslizando na prancha



a Atrito estático



Quando a extremidade em que o bloco está alcança $1,03\ m$, dizemos que o bloco está no limiar no movimento, ou seja, qualquer mínima interferência no sistema, o bloco começará a se mover. Por isso, podemos considerar a condição de equilíbrio para este instante.

As equações obtidas aplicando a Segunda Lei de Newton são:

- Na direção horizontal

$$n.\mu_s - m.g.sen(\gamma) = 0$$

- Na direção vertical

$$n - m.g.cos(\gamma) = 0$$

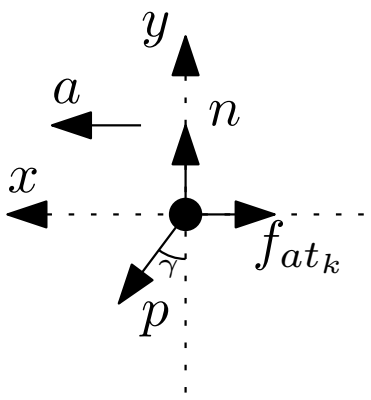
Isolando a normal da equação do equilíbrio vertical, obtemos:

$$n = m.g.cos(\gamma)$$

Substituindo na equação do equilíbrio horizontal:

$$m.g.cos(\gamma).\mu_s - m.g.sen(\gamma) = 0 \Rightarrow \mu_s = tg(\gamma) = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}} = \frac{1,03}{\sqrt{2^2 - 1,03^2}} = 0,6$$

b Atrito cinético



Para o atrito cinético, devemos considerar a partir do momento em que começa a haver movimento, ou seja, aceleração. As equações de movimento serão:

- Na vertical

$$n - m.g.cos(\gamma) = 0$$

- Na horizontal

$$m.g.sen(\gamma) - n.\mu_k = m.a$$

Perceba que verticalmente o problema é o mesmo, portanto a normal não mudará:

$$n = m.g.cos(\gamma)$$

Assim, substituindo na equação de movimento horizontal, podemos isolar a aceleração:

$$m.g.sen(\gamma) - m.g.cos(\gamma).\mu_k = m.a \Rightarrow a = g.sen(\gamma) - g.cos(\gamma).\mu_k$$

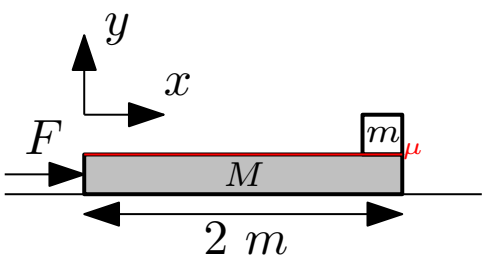
Podemos usar a equação horária da posição, pois sabemos dados como tempo, variação de posição e velocidade inicial da partícula. Assim, conseguiremos isolar o coeficiente de atrito cinético:

$$l = l_0 + v_{0l}.t + \frac{1}{2}.a_l.\Delta t^2 = 0 + 0.t + \frac{1}{2}.(g.sen(\gamma) - g.cos(\gamma).\mu_k).\Delta t^2 \Rightarrow \frac{2.l}{\Delta t^2} = g.sen(\gamma) - g.cos(\gamma).\mu_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_k = tg(\gamma) - \frac{2.l}{g.cos(\gamma).\Delta t^2} = \frac{h}{\sqrt{l^2 - h^2}} - \frac{2.l}{g.\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{l}.\Delta t^2} = \frac{1,03}{\sqrt{2^2 - 1,03^2}} - \frac{2.2}{9,8.\frac{\sqrt{2^2-1,03^2}}{2}.2,2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu_k = 0,5$$

5.14 Bloquinho sobre prancha horizontal



Sobre o bloquinho atua, na horizontal, apenas a força de atrito:

$$\mu_s.n = m.a$$

Como temos equilíbrio vertical, vale que:

$$n - m.g = 0 \Rightarrow n = m.g$$

Substituindo na equação anterior, obtemos a aceleração do bloquinho:

$$\mu_s.m.g = m.a \Rightarrow a = \mu_s.g$$

Para que o bloquinho esteja em repouso sobre a prancha, a prancha e o bloquinho devem ter a mesma aceleração, assim não haverá movimento relativo. Aplicando a Segunda Lei de Newton à prancha:

$$F - \mu_s.n = M.a \Rightarrow F - \mu_s.m.g = M.\mu_s.g \Rightarrow F = M.\mu_s.g + \mu_s.m.g = (m+M).g.\mu_s \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = (0,1+0,5).9,8.0,4 = 2,35\ N$$

Se a força F for de 3 N, haverá movimento relativo (pois a força máxima para que não haja é menor que este valor). Logo, a força de atrito não é mais estática, mas sim cinética. A aceleração a_p da prancha é:

$$a_p = \frac{F - \mu_k.m.g}{M} = \frac{3 - 0,35.0,1.9,8}{0,5} = 5,31\ \frac{m}{s^2}$$

E a aceleração do bloquinho será de mesma, já que a força F não atua nele. Mas agora a força que atua sobre ele advém de uma força de atrito cinético, não mais estático:

$$a_b = \mu_k.g = 0,35.9,8 = 3,43\ \frac{m}{s^2}$$

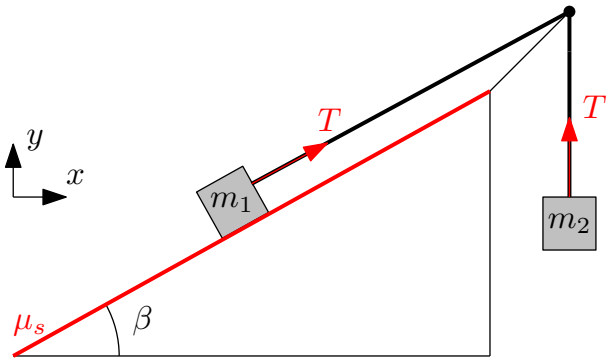
Portanto, a aceleração do bloquinho em relação à prancha é:

$$a_{b/p} = a_b - a_p = 3,4 - 5,3 = -1,88\ \frac{m}{s^2}$$

Com a equação horária da posição podemos calcular o tempo que o bloquinho leva para percorrer o comprimento da prancha com esta aceleração:

$$x = x_0 + v_{0x}.t + \frac{1}{2}.a_x.t^2 = 0 + 0.t - \frac{1}{2}.1,88.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2.x}{1,88}} = \sqrt{\frac{-2.(-2)}{1,88}} = 1,46\ s$$

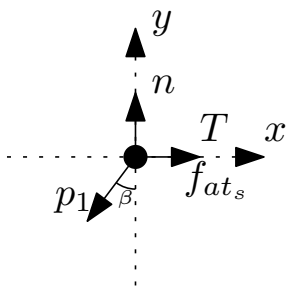
5.15 Blocos ligados por fio em plano inclinado com atrito



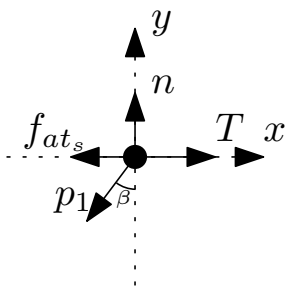
Para que o sistema se mantenha em equilíbrio, as forças resultantes nos blocos 1 e 2 devem ser nulas. Aplicando a condição de equilíbrio ao bloco 2:

$$T - m_2.g = 0 \Rightarrow T = m_2.g$$

Perceba que existem duas situações: bloco 2 quase indo pra baixo e bloco 2 quase indo para cima. As duas situações afetarão o sentido da força de atrito sobre o bloco 1.



m_2 quase subindo



m_2 quase descendo

Perceba que verticalmente o problema não muda. Sempre teremos a seguinte força normal:

$$n - m_1.g.cos(\beta) = 0 \Rightarrow n = m_1.g.cos(\beta)$$

Então precisamos descrever os problemas apenas horizontalmente.
Aplicando as condições de equilíbrio para o primeiro caso, obtemos:

$$\mu_s.n + T - m_1.g.sen(\beta) = 0 \Rightarrow \mu_s.m_1.g.cos(\beta) + m_2.g - m_1.g.sen(\beta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_2 = m_1.sen(\beta) - \mu_s.m_1.cos(\beta) = 10.sen(45°) - 0,5.10.cos(45°) = 3,54\ kg$$

No segundo caso, a condição de equilíbrio nos dá o seguinte:

$$T - \mu_s.n - m_1.g.sen(\beta) = 0 \Rightarrow m_2.g - \mu_s.m_1.g.cos(\beta) - m_1.g.sen(\beta) = 0 \Rightarrow$$

$$m_2 = \mu_s.m_1.cos(\beta) + m_1.sen(\beta) = 0,5.10.cos(45^\circ) + 10.sen(45^\circ) = 10,6\ kg$$

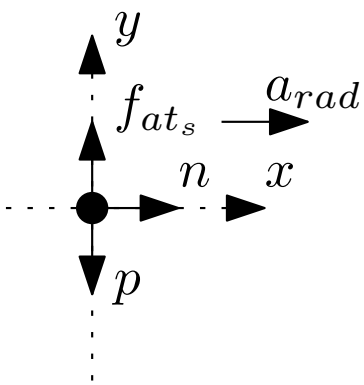
Portanto, provamos que para o bloco 1 permanecer em equilíbrio, a massa do bloco 2 deve respeitar a desigualdade:

$$3,54\ kg < m_2 < 10,6\ kg$$

Usamos "menor que"e não "menor igual que", pois lembre que na condição de equilíbrio o bloco 1 pode estar se deslocando com velocidade constante. Portanto, para garantir que ele esteja em repouso, temos que garantir que a massa do bloco 2 não atinja os extremos.

5.16 Centrífuga de parque de diversões

Um diagrama de corpo livre nos auxiliará na análise das forças que atuam em cada criança.



Perceba que a força resultante centrípeta será nossa força normal. Portanto, ela gerará a aceleração radial necessária para que possamos rodar no interior do brinquedo. Pela Segunda Lei de Newton, temos:

$$n = m.a_{rad} = m.\frac{v^2}{R}$$

Lembre do vínculo que possuímos entre velocidade angular e linear!

$$n = m.\frac{\omega^2.R^2}{R} = m.\omega^2.R$$

Verticalmente, devemos estar em repouso. Aplicando a condição de equilíbrio na vertical, obtemos:

$$\mu_s.n - m.g = 0 \Rightarrow \mu_s.m.\omega^2.R - m.g = 0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{\mu_s.R}}$$

Se substituirmos os valores com unidade do S.I.[†], teremos ω em $\frac{rad}{s}$. Lembre que:

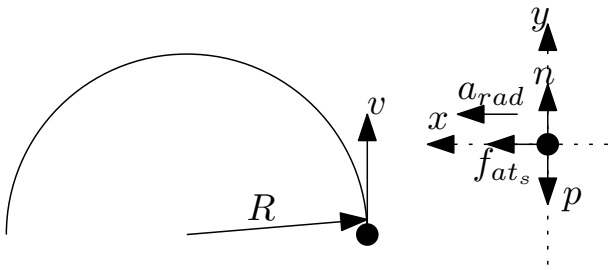
$$1\ rpm = 1\ \frac{rot}{min} = 1\frac{2.\pi\ rad}{60\ s} = \frac{\pi}{30}\ \frac{rad}{s}$$

Logo, se queremos a velocidade angular em rpm, devemos considerar:

$$\omega = \frac{30}{\pi}.\sqrt{\frac{g}{\mu_s.R}} = \frac{30}{\pi}.\sqrt{\frac{9,8}{0,5.2}} = 29,9\ rpm$$

[†]Sistema Internacional

5.17 Velocidade máxima em uma curva



Para fazer a curva sem deslizar, a força resultante centrípeta existente é a força de atrito **estático**, por isso é impossível fazer curvas em superfície muito polidas (sem que elas estejam inclinadas), como o gelo, por exemplo. Então nosso diagrama de corpo livre é:

Verticalmente estamos em equilíbrio, então:

$$n - m.g = 0 \Rightarrow n = m.g$$

Horizontalmente temos o movimento de rotação:

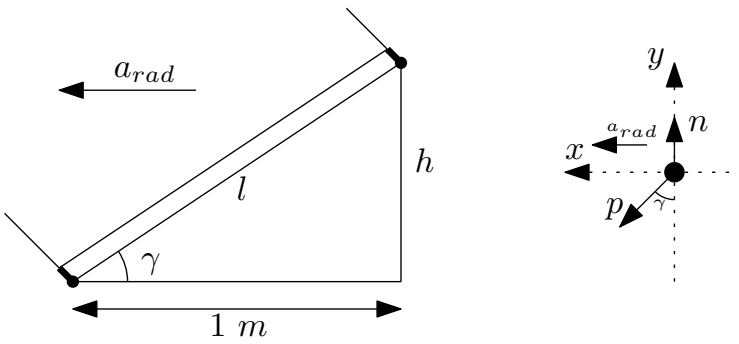
$$\mu_s.n = m.a_{rad} \Rightarrow \mu_s.mg = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow v = \sqrt{R.\mu_s.g}$$

Queremos a resposta em $\frac{km}{h}$, então:

$$v = 3,6.\sqrt{R.\mu_s.g} = 3,6.\sqrt{30.0,6.9,8} = 47,8\ \frac{km}{h}$$

5.18 Força aplicada por um trem sobre os trilhos

Neste caso não há atrito, o que fará o trem fazer curva é uma componente de sua força peso na direção horizontal. Um diagrama de corpo livre nos ajudará a entender a composição de forças.



Aplicando a Segunda Lei de Newton na direção horizontal, obtemos:

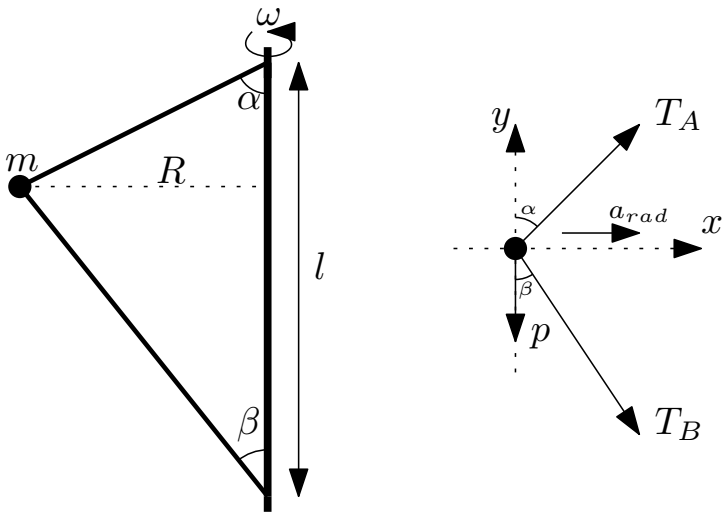
$$m.g.sen(\gamma) = m.a_{rad} = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow sen(\gamma) = \frac{v^2}{g.R} \Rightarrow \gamma = arsen\left(\frac{v^2}{g.R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma = arsen\left(\frac{(\frac{30}{3,6})^2}{9,8.100}\right) = 4,06^\circ$$

Pelo triângulo formado pelos trilhos, podemos calcular h com a tangente do ângulo γ:

$$tg(\gamma) = \frac{h}{1} = h \Rightarrow h = tg(4,06^\circ) = 0,071\ m = 7,1\ cm$$

5.19 Massa girando com velocidade angular ω



A primeira coisa que devemos descobrir é o comprimento do raio da curva feita pela massa. Podemos descobrir os catetos dos triângulos superior e inferior com a Trigonometria. Para o triângulo superior:

$$tg(\alpha) = \frac{R}{l_A} \Rightarrow l_A = tg(\alpha).R$$

Para o inferior:

$$tg(\beta) = \frac{R}{l_B} \Rightarrow l_B = tg(\beta).R$$

Como $l_A + l_B = l$, obtemos:

$$tg(\alpha).R + tg(\beta).R = l \Rightarrow R.(tg(\alpha) + tg(\beta)) = l \Rightarrow R = \frac{l}{tg(\alpha) + tg(\beta)}$$

Agora podemos aplicar a Segunda Lei de Newton. Verticalmente, o corpo deve estar em equilíbrio e horizontalmente deve ter uma resultante centrípeta.

- Na vertical

$$T_A.cos(\alpha) - T_B.cos(\beta) - m.g = 0$$

- Na horizontal

$$T_A.sen(\alpha)+T_B.sen(\beta) = m.a_{rad} = m.\frac{v^2}{R} = m.\frac{(\omega.R)^2}{R} \Rightarrow T_A.sen(\alpha)+T_B.sen(\beta) = m.\omega^2.R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A.sen(\alpha) + T_B.sen(\beta) = \frac{m.\omega^2.l}{tg(\alpha) + tg(\beta)}$$

Podemos isolar a tensão T_B da primeira equação:

$$T_B.cos(\beta) = T_A.cos(\alpha) - m.g \Rightarrow T_B = \frac{T_A.cos(\alpha) - m.g}{cos(\beta)}$$

Substituindo na equação que descreve a dinâmica horizontal, podemos isolar a tensão do fio A:

$$T_A.sen(\alpha) + \frac{T_A.cos(\alpha) - m.g}{cos(\beta)}.sen(\beta) = T_A.sen(\alpha) + (T_A.cos(\alpha) - m.g).tg(\beta) = \frac{m.\omega^2.l}{tg(\alpha) + tg(\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A.sen(\alpha) + T_A.cos(\alpha).tg(\beta) - m.g.tg(\beta) = \frac{m.\omega^2.l}{tg(\alpha) + tg(\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A.(sen(\alpha) + cos(\alpha).tg(\beta)) = \frac{m.\omega^2.l}{tg(\alpha) + tg(\beta)} + m.g.tg(\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{1}{sen(\alpha) + cos(\alpha).tg(\beta)}.\left(\frac{m.\omega^2.l}{tg(\alpha) + tg(\beta)} + m.g.tg(\beta)\right)$$

Substituindo os valores dos ângulos:

$$T_A = \frac{1}{sen(60°) + cos(60°).tg(30°)}.\left(\frac{m.\omega^2.l}{tg(60°) + tg(30°)} + m.g.tg(30°)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_A = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{3}}.\left(\frac{m.\omega^2.l}{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{3}.mg\right)$$

A partir daí, usando os valores tabelados dos ângulos notáveis e fazendo manipulações algébricas, obtemos:

$$T_A = \frac{m}{2}.\left(\frac{3}{4}.\omega^2.l + g\right)$$

Com esse valor calculado, podemos voltar na equação em que isolamos a tensão T_B e substituir T_A:

$$T_B = \frac{\frac{m}{2}.\left(\frac{3}{4}.\omega^2.l + g\right).cos(\alpha) - m.g}{cos(\beta)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_B = \frac{\frac{m}{2}.\left(\frac{3}{4}.\omega^2.l + g\right).cos(60°) - m.g}{cos(30°)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_B = \frac{\frac{m}{2}.\left(\frac{3}{4}.\omega^2.l + g\right).\frac{1}{2} - m.g}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{m}{2}.\left(\frac{3}{4}.\omega^2.l + g\right) - 2.m.g}{\sqrt{3}}$$

Após algumas manipulações, obtemos facilmente o valor de T_B:

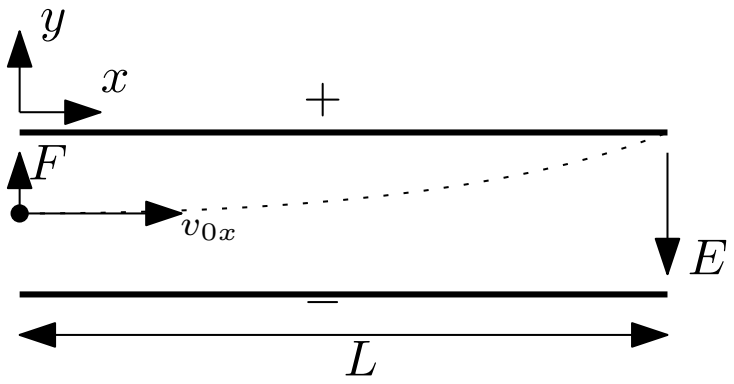
$$T_B = \frac{\sqrt{3}}{2}.m.\left(\frac{l}{4}.\omega^2 - g\right)$$

A corda estar frouxa, implica, fisicamente, na sua tensão ser nula. Então devemos fazer $T_B = 0$ e avaliar o valor de ω:

$$0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.m.\left(\frac{l}{4}.\omega^2 - g\right) \Rightarrow \frac{l}{4}.\omega^2 - g = 0 \Rightarrow \omega = \pm 2.\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Devemos considerar os dois resultados, pois em um giramos no sentido horário, e no outro, no sentido anti-horário. Portanto, não importando o sentido da velocidade angular, ao atingirmos um módulo igual a $2.\sqrt{\frac{g}{l}}$ a corda B estará frouxa.

5.20 Elétrons entre placas



A primeira coisa que podemos fazer é calcular a força impressa pela diferença de potencial entre as placas nos elétrons. Obtemos então:

$$F = e.E$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, podemos encontrar a aceleração vertical:

$$e.E = m.a_y \Rightarrow a_y = \frac{e.E}{m}$$

Como horizontalmente não temos força aplicada nos elétrons, não há aceleração. Portanto, o tempo que leva para que o elétron atravesse as placas é dado pela equação horária da posição:

$$x = x_0 + v_{0x}.t \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{v_{0x}} = \frac{L}{v_0} = \frac{2.10^{-2}}{3.10^6} = \frac{2}{3}.10^{-8}\ s$$

Neste período de tempo, a velocidade vertical será:

$$v_y = v_{0y} + a_y.t = 0 + \frac{e.E}{m}.t = \frac{1,6.10^{-19}.1.10^3}{9,11.10^{-31}}.\frac{2}{3}.10^{-8} = 1,17.10^6\ \frac{m}{s}$$

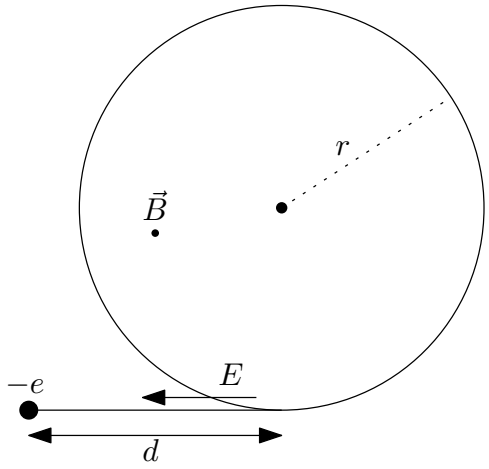
Com esses valores das velocidades, podemos calcular a tangente do ângulo:

$$tg(\theta) = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta = tg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = tg\left(\frac{1,17.10^6}{3.10^6}\right) = 21,3^\circ$$

E a magnitude do vetor velocidade é calculada considerando cada componente:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(3.10^6)^2 + (1,17.10^6)^2} = 3,22.10^6\ \frac{m}{s}$$

5.21 Elétron se movendo em campo magnético



Se a velocidade e o campo magnético são perpendiculares, a força magnética se reduz à:

$$F_M = q.v.B.sen(90°) = q.v.B$$

Como a única força que atua no elétron é a magnética, ela será nossa resultante centrípeta. Aplicando a Segunda Lei de Newton:

$$F_M = m.a_{rad} \Rightarrow q.v.B = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow q.B = m.\frac{v}{r}$$

Usando o vínculo geométrico de v, obtemos a frequência angular:

$$q.B = m.\frac{\omega.r}{r} \Rightarrow \omega = \frac{q.B}{m}$$

Lembre que a unidade convencional do campo magnético é o Tesla (T). Com isso, a frequência é:

$$\omega = \frac{1,6.10^{-19}.5.10^{-5}}{9,11.10^{-31}} = 8,8.10^6 \ \frac{rad}{s}$$

Se uma diferença de potencial V atua sobre o elétron por uma distância d, a força impressão no elétron é:

$$F = q.E = q.\frac{V}{d}$$

Portanto, pela Segunda Lei de Newton, a aceleração é:

$$q.\frac{V}{d} = m.a \Rightarrow a = q.\frac{V}{m.d}$$

Considerando que o elétron parte do repouso, sua velocidade ao final de d é encontrada pela equação de Torricelli:

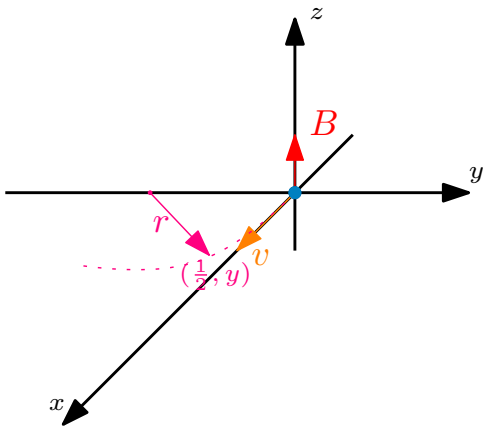
$$v^2 = v_0^2 + 2.a.d = 0 + 2.q.\frac{V}{m.d}.d \Rightarrow v = \sqrt{2.q.\frac{V}{m}}$$

E, pela equação obtida anteriormente, o raio da órbita é:

$$r = \frac{m.v}{q.B} = \frac{m.\sqrt{2.q.\frac{V}{m}}}{q.B} = \frac{1}{B}.\sqrt{\frac{2.m.V}{q}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{5.10^{-5}}.\sqrt{\frac{2.9,11.10^{-31}.250}{1,6.10^{-19}}} = 1,07 \ m$$

5.22 Feixe de prótons em campo magnético



Com os dados iniciais que temos, já é possível calcular o raio da circunferência descrita pelo próton:

$$r = \frac{m.v}{q.B} = \frac{1,67.10^{-27}.10^{6}}{1,6.10^{-19}.100.10^{-4}} = 1,04\ m$$

Pela equação da circunferência, sabemos que qualquer ponto (x, y) que está na circunferência deve satisfazer:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Substituindo o ponto em questão, obtemos:

$$0,5^3 + (r-y)^2 = r^2 \Rightarrow (r-y)^2 = r^2 - 0,5^2 \Rightarrow r - y = \sqrt{r^2 - 0,5^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = r - \sqrt{r^2 - 0,5^2} = 1,04 - \sqrt{1,04^2 - 0,5^2} = 0,13\ m$$

Pela Regra da mão direita, sabemos que a posição é negativa, ou seja:

$$y = -0,13\ m$$

CAPÍTULO

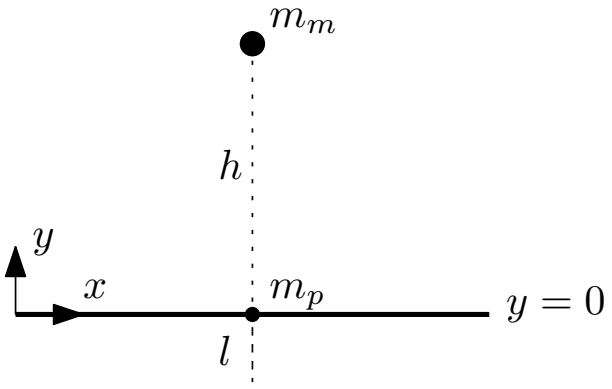
6

TRABALHO E ENERGIA MECÂNICA

"Não há vento favorável para quem não sabe a que porto deseja chegar. A sabedoria começa na definição dos termos, pois sem clareza de propósito, o homem vagueia sem direção, à mercê das circunstâncias."

Sêneca

6.1 Resolvendo um problema antigo com novas técnicas



Inicialmente, o martelo está em uma altura h, e chega, posteriormente, à altura 0 com velocidade v. Por conservação de energia, obtemos a velocidade v em função das alturas:

$$m_m.g.h = \frac{1}{2}.m_m.v_0^2 \Rightarrow v_0 = \sqrt{2.g.h}$$

Quando o martelo chega em 0, entra em contato com o prego e passam a se mover juntos. Por conservação do momento linear, a nova velocidade é:

$$m_m.v_0 = (m_m + m_p).v \Rightarrow v = \frac{m_m.v_0}{m_m + m_p} = \frac{m_m}{m_m + m_p}.\sqrt{2.g.h}$$

A partir deste encontro, surge a força de atrito (força dissipativa) que atua no conjunto $martelo + prego$ até atingirem o repouso. Por conservação de energia, teremos:

$$\frac{1}{2}.(m_m + m_p).v^2 - F.l = (m_m + m_p).g.(-l) \Rightarrow F.l = \frac{1}{2}.(m_m + m_p).v^2 + (m_m + m_p).g.l \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F.l = \frac{1}{2}.(m_m+m_p).\left(\frac{m_m}{m_m + m_p}.\sqrt{2.g.h}\right)^2 + (m_m+m_p).g.l = \frac{m_m^2}{m_m + m_p}.g.h + (m_m+m_p).g.l \Rightarrow$$

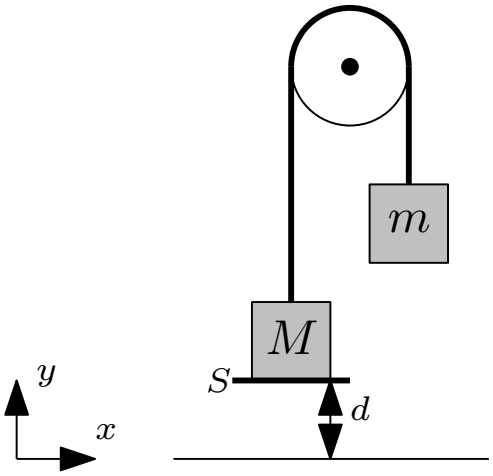
Como $m_m >> m_p$, vale que $m_m + m_p \approx m_m$, então:

$$F.l = \frac{m_m^2}{m_m}.g.h + (m_m + m_p).g.l = m_m.g.h + m_m.g.l = m_m.g.(h + l)$$

Também vale que $h >> l$, ou seja, $h + l \approx h$. Daí obtemos:

$$F.l = m_m.g.h \Rightarrow F = m_m.g.\frac{h}{l} \Rightarrow \frac{F}{m_m.g} = \frac{h}{l}$$

6.2 Máquina de Atwood partindo do equilíbrio



a Velocidade de M

Como $M > m$, ao remover o suporte S, permitiremos que a massa M acelere verticalmente no sentido negativo de y. Inicialmente, temos apenas energia potencial gravitacional da massa M e no final teremos as energias cinéticas das massas M e m e a energia potencial gravitacional da massa m:

$$M.g.d = \frac{1}{2}.M.v^2 + \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.d \Rightarrow \frac{1}{2}.v^2.(m+M) = g.d.(M-m)$$

$$v = \sqrt{\frac{M-m}{M+m}.2.g.d}$$

$$v = \sqrt{\frac{3-1}{3+1}.2.9,8.2} = 4,43\ \frac{m}{s}$$

b Verificando o resultado por Leis de Newton

Como esse sistema é, na verdade, uma Máquina de Atwood que parte do equilíbrio. A fórmula geral para a aceleração das massas já foi calculada em problemas anteriores, então usaremos este valor diretamente:

$$a = \frac{M-m}{M+m}.g = \frac{3-1}{3+1}.9,8 = 4,9\ \frac{m}{s^2}$$

Usando Torricelli, podemos determinar a velocidade final das massas*:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2.a_y.\Delta y = v_{0y}^2 + 2.a.d = 0^2 + 2.(-4,9).(-2) \Rightarrow v_y = 4,43\ \frac{m}{s}$$

*Para a massa M tanto a aceleração quantos a variação da posição são negativas.

6.3 Força atuando em partícula em movimento

a Pontos em que a velocidade anula

O trabalho exercido pela força em um intervalo de x_0 à x_1 é:

$$W = \int_{x_0}^{x_1} F(x)\ dx = \int_{x_0}^{x_1} (-a - b.x)\ dx = -a.\int_{x_0}^{x_1} dx - b.\int_{x_0}^{x_1} x\ dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = -a.(x_1 - x_0) - \frac{b}{2}.(x_1 - x_0)^2$$

Queremos que esse trabalho seja suficiente para anular a velocidade da partícula. Logo, pelo Teorema do Trabalho-Energia, obtemos:

$$W = \frac{1}{2}.m.v_f^2 - \frac{1}{2}.m.v_i^2 = \frac{1}{2}.m.0^2 - \frac{1}{2}.m.v_i^2 = -\frac{1}{2}.m.v_i^2$$

Como partimos da origem, vamos considerar $x_0 = 0$ e x_1 será apenas x, assim obtemos:

$$\Rightarrow -a.x - \frac{b}{2}.x^2 = -\frac{1}{2}.m.v_i^2 \Rightarrow \frac{b}{2}.x^2 + a.x - \frac{1}{2}.m.v_i^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}.x^2 + 4.x - 4,5 = 0$$

Por Bháskara, podemos encontrar as raízes:

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.\frac{1}{2}.(-4,5)}}{2.\frac{1}{2}} = -4 \pm 5$$

Como estamos falando da posição da partícula no espaço, as raízes positiva e negativa fazem sentido físico. Sendo elas:

$$x_+ = 1\ m$$

$$x_- = -9\ m$$

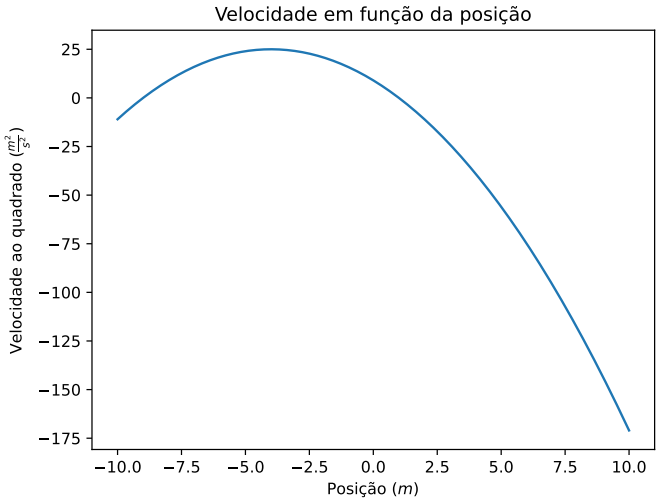
b Gráfico da velocidade

Podemos chegar em uma fórmula para a velocidade em função da posição a partir do Teorema do Trabalho-Energia:

$$W = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.v_i^2 \Rightarrow v^2 = \frac{2}{m}.W + v_i^2 = \frac{2}{m}.\left(-a.x - \frac{b}{2}.x^2\right) + v_i^2 = \frac{-2.a}{m}.x - \frac{b}{m}.x^2 + v_i^2 \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{-2.a}{m}.x - \frac{b}{m}.x^2 + v_i^2} = \sqrt{-8.x - x^2 + 9}$$

O plote desta função de x é:



Preferimos fazer o plote do quadrado da velocidade, pois assim fugimos das raízes negativas. Como queremos apenas os pontos em que o valor da velocidade se anula, isso não fará diferença alguma.

c Tipo de força

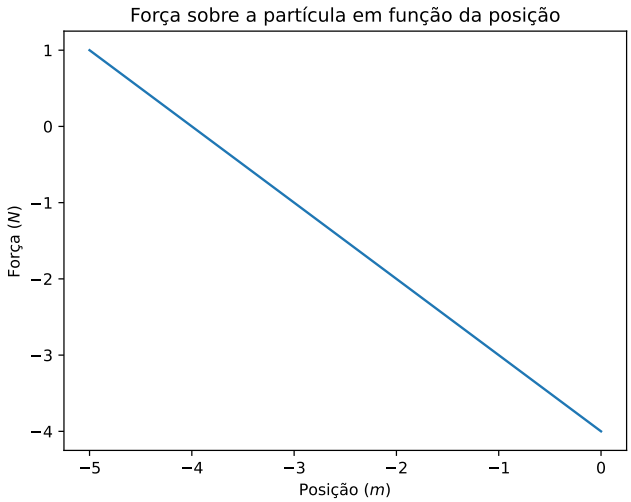
Esta força é análoga à Lei de Hooke:

$$F = -k.x$$

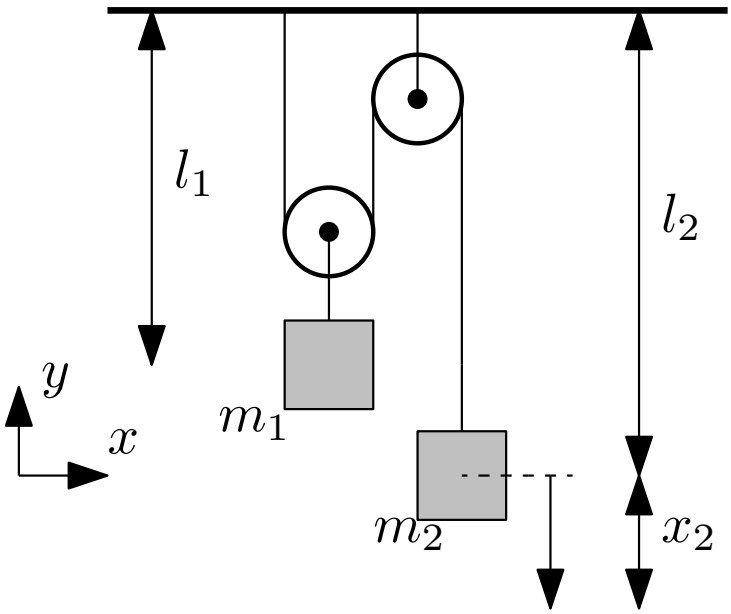
Para calcular a posição de equilíbrio de uma força, basta procurarmos o argumento (neste caso, será a posição x) que zera a função (nesse caso, nossa $F(x)$). Então, obtemos:

$$F(x) = -a - b.x = 0 \Rightarrow x = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{1} = -4\ m$$

Podemos visualizar este resultado graficamente.



6.4 Massas ligadas à polias partindo do repouso



a Velocidade de cada bloco

Pela conservação de energia, temos que $\Delta K + \Delta U = 0$, ou seja, não há perda ou ganho de energia total. Como inicialmente não há energia cinética, obtemos:

$$m_1.g.\Delta h_1 + m_2.g.\Delta h_2 + \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 = 0$$

Pelo vínculo geométrico, temos que $\Delta h_2 + 2.\Delta h_1 = 0$.

Como a massa m_2 desce x_2, ou seja, $\Delta h_2 = -x_2$, obtemos:

$$m_1.g.\frac{x_2}{2} - m_2.g.x_2 + \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 = 0 \Rightarrow -m_1.g.\frac{x_2}{2} + m_2.g.x_2 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

Derivando a relação para a variação da altura em relação ao tempo, obtemos que $v_2 + 2.v_1 = 0$, substituindo v_2 na equação da conservação da energia:

$$g.x_2.\left(m_2 - \frac{m_1}{2}\right) = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.(-2.v_1)^2 = \left(\frac{m_1}{2} + 2.m_2\right).v_1^2 \Rightarrow$$

Assim, obtemos:

$$\Rightarrow v_1 = \sqrt{g.x_2\frac{m_2 - \frac{m_1}{2}}{\frac{m_1}{2} + 2.m_2}} = \sqrt{g.x_2\frac{2.m_2 - m_1}{m_1 + 4.m_2}}$$

Usando a relação das velocidades, podemos descobrir v_2:

$$v_2 = -2.v_1 = -2.\sqrt{g.x_2\frac{2.m_2 - m_1}{m_1 + 4.m_2}}$$

Substituindo o valor das massas, obtemos os seguintes valores:

$$v_1 = \sqrt{\frac{g.x_2}{3}}$$

$$v_2 = -2.\sqrt{\frac{g.x_2}{3}}$$

b A aceleração de cada bloco

Como partimos do repouso, e sabemos a distância que cada bloco percorre, e suas respectivas velocidades finais, podemos usar Torricelli para descobrir a aceleração. Para o bloco 1:

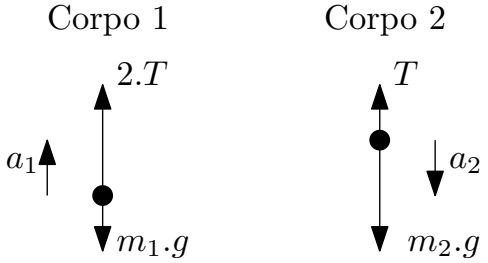
$$v_1^2 = 2.a_1.\Delta h_1 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{g.x_2}{3}}\right)^2 = 2.a_1.\frac{x_2}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{g}{3}$$

Derivando a relação da velocidade entre os dois blocos em relação ao tempo, obtemos que $a_2 + 2.a_1 = 0$. Portanto:

$$a_2 = -\frac{2}{3}.g$$

c Provando por Lei de Newton

Os diagramas de corpo livre de cada bloco são:



Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada corpo:

$$2.T - m_1.g = m_1.a_1$$

$$T - m_2.g = m_2.a_2$$

E vale o vínculo geométrico $2.a_1 + a_2 = 0$.
Isolando a tensão T da segunda equação e substituindo na primeira equação:

$$2.(m_2.a_2 + m_2.g) - m_1.g = m_1.a_1$$

Substituindo a_2 usando o vínculo geométrico:

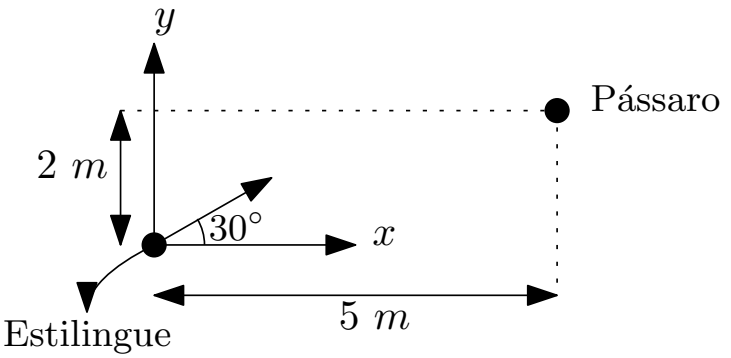
$$2.(m_2.(-2.a_1) + m_2.g) - m_1.g = m_1.a_1 \Rightarrow -4.m_2.a_1 + 2.m_2.g = m_1.a_1 + m_1.g \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4.m_2.a_1 - m_1.a_1 = m_1.g - 2.m_2.g \Rightarrow (4.m_2 + m_1).a_1 = (2.m_2 - m_1).g \Rightarrow$$

$$a_1 = \frac{2.m_2 - m_1}{4.m_2 + m_1}.g$$

Substituindo as massas, obtemos o mesmo valor do item anterior, tanto para a_1 quanto a_2.

6.5 Atirando em um passarinho



Temos a coordenada $(x,\ y)$ do pássaro e também o ângulo de lançamento. Por isso, podemos usar a equação geral da trajetória e isolar a velocidade inicial:

$$\Delta y = tg(\theta).\Delta x - \frac{1}{2}.g.\frac{\Delta x^2}{v_0^2.cos^2(\theta)} \Rightarrow \frac{1}{2}.g.\frac{\Delta x^2}{v_0^2.cos^2(\theta)} = tg(\theta).\Delta x - \Delta y$$

$$v_0^2 = \frac{1}{2}.g.\frac{\Delta x^2}{cos^2(\theta)}.\frac{1}{\Delta x.tg(\theta) - \Delta y}$$

$$v_0 = \frac{\Delta x}{cos(\theta)}.\sqrt{\frac{g}{2}.\frac{1}{\Delta x.tg(\theta) - \Delta y}} = \frac{5}{cos(30^\circ)}.\sqrt{\frac{9,8}{2}.\frac{1}{5.tg(30^\circ) - 2}} = 13,57\ \frac{m}{s}$$

Temos a relação entre a força e o tanto que o elástico estica. Então podemos calcular a "constante de mola"do elástico. Temos:

$$F = K.\Delta l \Rightarrow K = \frac{F}{\Delta l} = \frac{1}{0,01} = 100\ \frac{N}{m}$$

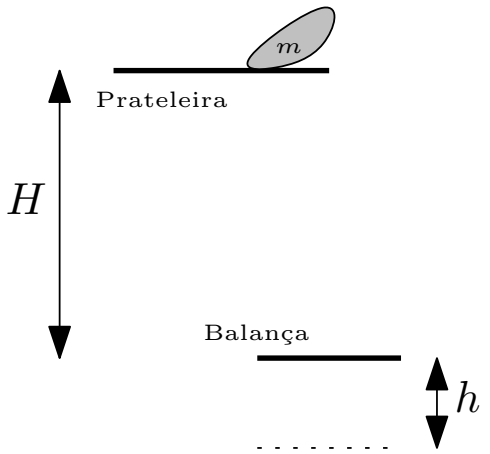
Podemos aplicar conservação de energia para o pedregulho. Com o estilingue tem dois elásticos, devemos multiplicar a energia de um elástico por 2:

$$E_{el} = E_k \Rightarrow 2.\left(\frac{1}{2}.K.\Delta l^2\right) = \frac{1}{2}.m.v_0^2 \Rightarrow \Delta l^2 = \frac{1}{2}.\frac{m.v_0^2}{K} \Rightarrow \Delta l = v_0.\sqrt{\frac{m}{2.K}}$$

$$\Delta l = 13,57.\sqrt{\frac{50.10^{-3}}{2.100}} = 0,215\ m = 21,5\ cm$$

Um exercício interessante é aumentar o número de elásticos do estilingue!

6.6 Contração da mola de uma balança



Nosso primeiro passo será calcular a constante de mola da mola da balança:

$$F = m.g = K.\Delta l \Rightarrow K = \frac{m.g}{\Delta l} = \frac{0,5.9,8}{0,01} = 490\ \frac{N}{m}$$

Agora vamos descobrir com qual velocidade a massa fresca chega à balança ao cair da prateleira. Por conservação de energia, obtemos:

$$m.g.H = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v^2 = 2.g.H$$

$$v = \sqrt{2.g.H} = \sqrt{2.9,8.1} = \sqrt{19,6}\ \frac{m}{s}$$

Com isso, podemos considerar a última conservação de energia, que ocorre quando a massa de fato interage com a mola. Obteremos:

$$m.g.h + \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.K.h^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.K.h^2 - m.g.h - \frac{1}{2}.m.v^2 = 0$$

Obtivemos uma equação do segundo grau em h, que é o tanto que a mola contrai. Usando Bháskara, obtemos:

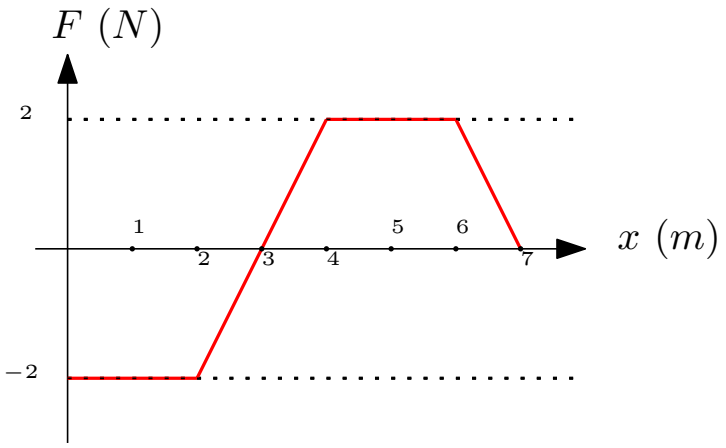
$$h = \frac{m.g \pm \sqrt{m^2.g^2 - 4.\left(\frac{1}{2}.K\right).\left(-\frac{1}{2}.m.v^2\right)}}{2.\left(\frac{1}{2}.K\right)} = \frac{m.g \pm \sqrt{m^2.g^2 + K.m.v^2}}{K}$$

$$h = \frac{0,5.9,8 \pm \sqrt{0,5^2.9,8^2 + 490.0,5.\sqrt{19,6}^2}}{490} = \frac{4,9 \pm 69,5}{490}$$

A solução positiva nos dá:

$$h = \frac{4,9 + 69,5}{490} = 0,152\ m = 15,2\ cm$$

6.7 Partícula com movimento unidimensional



Pelo Teorema do Trabalho-Energia Cinética, podemos estipular a velocidade com base na área do gráfico $F \times x$ (Trabalho sobre a partícula). Assim, obtemos:

$$W = \frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{1}{2}.m.v_0^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v^2 = W + \frac{1}{2}.m.v_0^2 \Rightarrow v^2 = 2.\frac{W}{m} + v_0^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.\frac{W}{m} + v_0^2}$$

Como em $x = 0$ temos $v = 3\ \frac{m}{s}$ e a massa $m = 2\ kg$, a equação fica:

$$v = \sqrt{W + 9}$$

Agora nosso trabalho se resume a calcular áreas.

a Ao percorrer $2\ m$

Obtemos $W = (-2).2 = -4\ J$. Portanto:

$$v = \sqrt{-4 + 9} = \sqrt{5}\ \frac{m}{s}$$

b Ao percorrer $3\ m$

Obtemos $W = (-2).2 + \frac{(-2).1}{2} = -4 - 1 = -5\ J$. Portanto:

$$v = \sqrt{-5 + 9} = \sqrt{4} = 2\ \frac{m}{s}$$

c Ao percorrer $4\ m$

Obtemos $W = (-2).2 + \frac{(-2).1}{2} + \frac{2.1}{2} = -4 - 1 + 1 = -4\ J$. Portanto:

$$v = \sqrt{-4 + 9} = \sqrt{5}\ \frac{m}{s}$$

d Ao percorrer 6 m

Obtemos $W = (-2).2 + \frac{(-2).1}{2} + \frac{2.1}{2} + 2.2 = -4 - 1 + 1 + 4 = 0\ J$. Portanto:

$$v = \sqrt{0 + 9} = \sqrt{9} = 3\ \frac{m}{s}$$

e Ao percorrer 7 m

Obtemos $W = (-2).2 + \frac{(-2).1}{2} + \frac{2.1}{2} + 2.2 + \frac{2.1}{2} = -4 - 1 + 1 + 4 + 1 = 1\ J$. Portanto:

$$v = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}\ \frac{m}{s}$$

6.8 Partícula sobre efeito de uma força

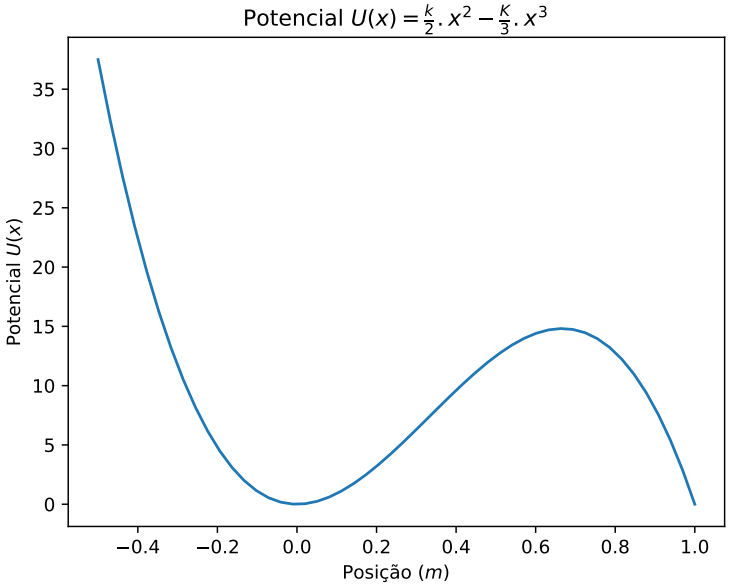
a Potencial associado à força

Temos a equação para a força. Sabendo que o potencial e a força se relacionam pelo gradiente, ou seja, $\vec{F} = -\vec{\nabla}U$, podemos calcular o potencial:

$$U(x) - U(0) = U(x) - \int_0^x F\ dx = -\int_0^x (-k.x' + K.x'^2)\ dx' = \int_0^x k.x'\ dx' - \int_0^x K.x'^2\ dx'$$

Como k e K são constantes, podem sair da integral. Integrando e aplicando os limites, obtemos:

$$U(x) = \frac{k}{2}.x^2 - \frac{K}{3}.x^3$$



b Posições de equilíbrio

O equilíbrio ocorre, matematicamente, quando a derivada do potencial associado é nula. A primeira solução é óbvio, $x = 0$. Desconsiderando este, obtemos:

$$-\frac{d}{dx}U(x) = -k.x + K.x^2 = 0 \Rightarrow -k + K.x = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{K} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}\ m$$

Ou seja, em $x = 0$ e em $x = \frac{2}{3}$ (ambos em metros) temos posições de equilíbrio. Perceba que em $x = 0$ a partícula se encontra num vale (ou poço) de potencial, ficando restringida à ele até que tenha energia suficiente para sair, por isso dizemos que esta é uma posição de equilíbrio estável. Para o ponto $x = \frac{2}{3}$ segue=se a mesma lógica, porém observe que agora a partícula está num pico de potencial, ou seja, qualquer variação em sua posição resultará em um movimento eminente, por isso seu equilíbrio é instável.

c Regime para movimento oscilatório

O movimento oscilatório ocorre quando a partícula fica presa dentro de um vale com certa energia (suficiente para se mover, mas não suficiente para sair do vale). Portanto, a partícula pode se mover na região do vale que está em $x = 0$.

Vamos verificar o valor que o potencial assume em $x = \frac{2}{3}\ m$:

$$U(2/3) = \frac{200}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{300}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{400}{9} - \frac{800}{27} = \frac{1200 - 800}{27} = \frac{400}{27}\ J$$

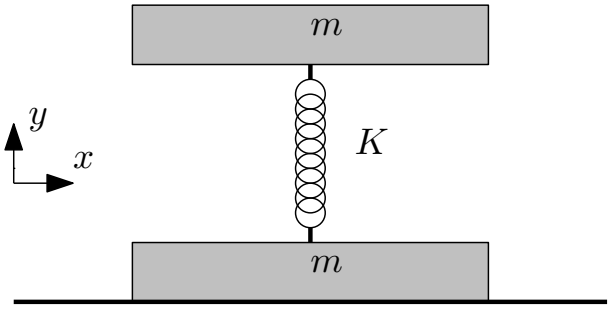
Portanto, a condição para que a partícula oscile é que sua posição seja menor que $x = \frac{2}{3}\ m$ (podendo inclusive ser $-\infty$) e que a sua energia seja menor que $\frac{400}{27}\ J$.

d Movimento da partícula

Para $x < 0\ m$, o potencial cresce, ou seja, se a partícula não tem energia suficiente, não conseguirá acessar essas regiões.

Para $x > \frac{2}{3}\ m$, o potencial decresce, ou seja, uma vez que a partícula passe deste ponto, ela tenderá a perder cada vez mais potencial. A não ser que uma força externa exerça trabalho sobre a partícula, ela irá naturalmente para $+\infty$.

6.9 Lâminas delgadas ligadas por mola



a Posição de equilíbrio

Como apenas o peso de uma lâmina está sendo sustentado pela mola, vale a condição de equilíbrio:

$$F_{el} - m.g = 0 \Rightarrow K.\Delta l - m.g = 0 \Rightarrow \Delta l = \frac{m.g}{K}$$

b Comprimindo a lâmina superior

Se comprimimos a mola em x, temos que $\Delta l = x$. Por conservação de energia, obtemos a velocidade com que a lâmina chegará à posição de equilíbrio novamente:

$$\frac{1}{2}.K.x^2 = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{K.x^2}{m}$$

Agora estamos na posição de equilíbrio com velocidade v. Aplicando novamente a conservação de energia:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.K.x'^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.K.x^2 - \frac{1}{2}.K.x'^2 = 0 \Rightarrow x' = x$$

Assim concluímos que a lâmina subirá o mesmo tanto que foi empurrada inicialmente.

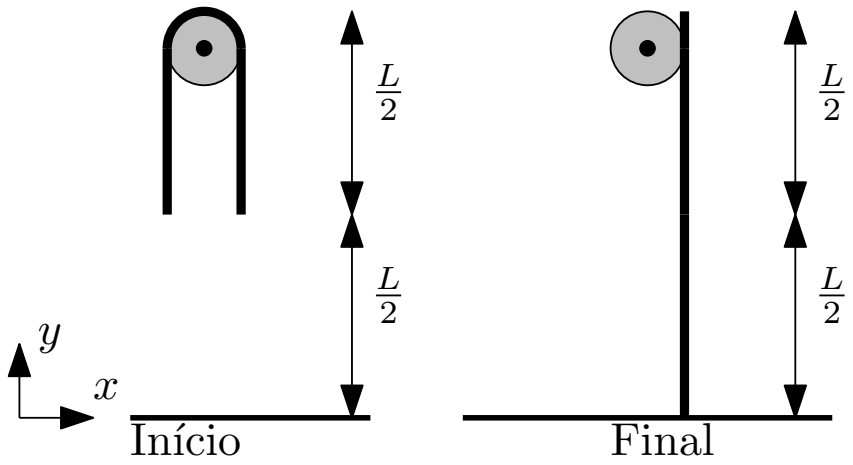
c Valor limite de x

Na prática, queremos que a mola seja comprimida num valor x e isso faça com que as duas lâminas adquiram velocidade e a que, antes estava na mesa, adquira uma altura. A ideia é muito mais simples do que parece!

No item (a) descobrimos quanto a mola se comprime pra sustentar uma das lâminas. Agora queremos que ela sustente as duas lâminas (já que a que está na mesa deve subir também). Logo, devemos apenas multiplicar o valor obtido anteriormente por 2, pois as lâminas são iguais.

$$\Delta l = 2.\frac{m.g}{K}$$

6.10 Corda pendurada em polia



Naturalmente, é estranho trabalhar com corpos extensos. Por isso, vamos considerar o centro de gravidade. Inicialmente, temos que a altura do centro de gravidade é:

$$h_i = \frac{1}{2}.L + \frac{1}{4}.L = \frac{3}{4}.L$$

No final, quando a corda estiver esticada, temos:

$$h_f = \frac{1}{2}.L$$

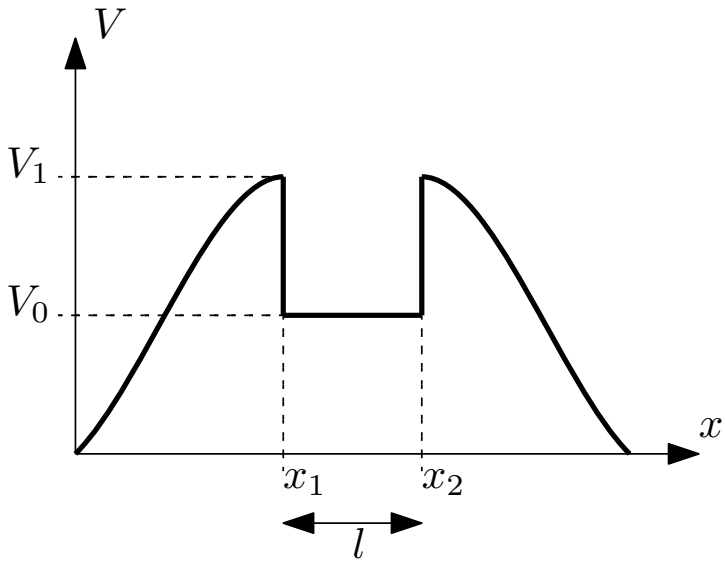
A variação de altura do centro de gravidade, portanto, é:

$$\Delta h = h_f - h_i = \frac{1}{2}.L - \frac{3}{4}.L = \frac{1}{4}.L$$

Agora, considerando que partimos do repouso, pela conservação da energia, obtemos:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = m.g.\Delta h \Rightarrow v = \sqrt{2.g.\Delta h} = \sqrt{\frac{g.L}{2}}$$

6.11 Partícula em um poço de potencial



A partícula está aprisionada no poço de comprimento l. O que ocorre é que nas proximidades de x_1, a força que é $-\frac{d}{dx}U$ é positiva, acelerando a partícula para x_2. Quando está nas proximidades de x_2 a força torna-se negativa, fazendo com que a partícula seja novamente empurrada para x_1. Daí já podemos concluir que o período de oscilação é exatamente o dobro do tempo que a partícula leva para ir de x_1 até x_2 (ou o contrário, tanto faz!).

A energia total E da partícula é $\frac{1}{2}.m.v^2 + V_0$, sendo que $V_1 > E > V_0$. Isolando a velocidade:

$$v = \pm\sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)}$$

As soluções + e − são válidas, tendo em vista o movimento oscilatório.
Lembre que $v = \frac{d}{dt}x$, logo:

$$\frac{d}{dt}x = \pm\sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)} \Rightarrow dx = \pm\sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)}\ dt$$

Integrando, obtemos:

$$\int_{x_0}^{x} dx = \pm\sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)} \int_{t_0}^{t} dt \Rightarrow x - x_0 = \pm\sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)}.(t - t_0) \Rightarrow$$

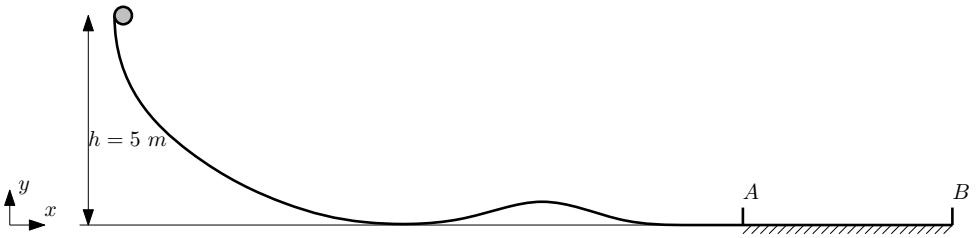
Agora considerando a posição inicial (x_0) como x_1 e a final (x) como x_2, ou seja, $x - x_0 = x_2 - x_1 = l$, obtemos o Δt que é metade do período T.

$$x_2 - x_1 = l = \pm\sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)}.\frac{T}{2}$$

Como escolhemos a "ida"da partícula, vale a solução positiva:

$$x_2 - x_1 = l = \sqrt{\frac{2}{m}.(E - V_0)}.\frac{T}{2} \Rightarrow T = 2.l.\sqrt{\frac{m}{2.(E - V_0)}}$$

6.12 Carrinho deslizando



Não importa que tenham "montes"entre o ponto de partida e o ponto A, a conservação de energia continua válida:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h} = \sqrt{2.9,8.5} = \sqrt{98}\frac{m}{s}$$

Chegando à região com atrito, podemos aplicar a segunda lei de Newton para descobrir a aceleração. Pelo equilíbrio em y, temos que:

$$n = m.g$$

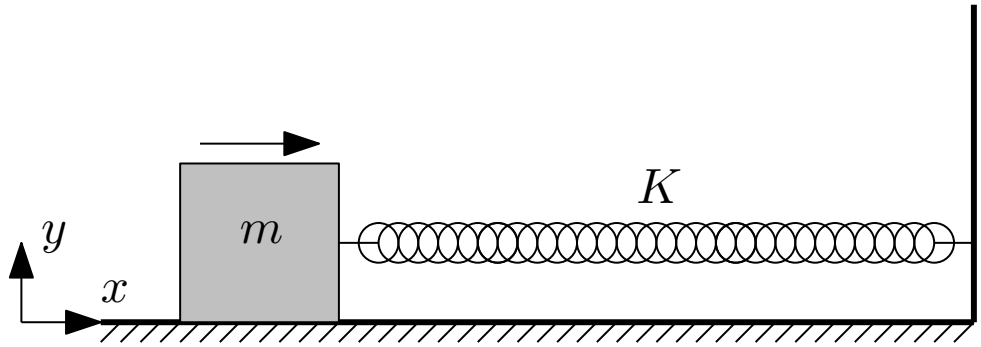
Em x, obtemos:

$$F_x = m.a_x \Rightarrow f_{atrito} = -\mu_c.n = m.a_x \Rightarrow a_x = -\frac{\mu_c.n}{m} = -\frac{\mu_c.m.g}{m} \Rightarrow a_X = -\mu_c.g$$

Temos o tempo t que o carrinho leva até chegar no repouso e também temos a velocidade inicial e final. Por isso, vamos usar a equação horária da velocidade:

$$v = v_0 + a_x.t \Rightarrow 0 = v_0 - \mu_c.g.t \Rightarrow \mu_c = \frac{v_0}{g.t} = \frac{\sqrt{98}}{9,8.1,25} = 0,81$$

6.13 Sistema massa-mola com atrito



a Deformação máxima da mola

Temos todos os dados necessários para montar a equação da conservação de energia. Ao empurrar a mola, não teremos apenas conversão de energia cinética em potencial elástico, pois há atrito. Quanto mais o bloco comprimir a mola, mais distância percorrerá e consequentemente mais energia será dissipada.

$$\frac{1}{2}.m.v^2 + W_{atrito} = \frac{1}{2}.K.x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v^2 - f_{atrito}.x = \frac{1}{2}.K.x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v^2 - \mu_c.n.x = \frac{1}{2}.K.x^2$$

Pelo equilíbrio em y, temos que $n = m.g$. Assim, obtemos uma equação do 2° grau em x.

$$\frac{1}{2}.m.v^2 - \mu_c.m.g.x = \frac{1}{2}.K.x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.K.x^2 + \mu_c.m.g.x - \frac{1}{2}.m.v^2 = 0$$

Aplicando Bháskara, obtemos:

$$x = \frac{-.m.g \pm \sqrt{(\mu_c.m.g)^2 + K.m.v^2}}{K} = \frac{-0,5.5.9,8 \pm \sqrt{(0,5.5.9,8)^2 + 250.5.1^2}}{250}$$

$$x = \frac{24,5 \pm 43,0}{250}$$

A mola está comprimindo (diminuindo de tamanho), por isso pegaremos a solução negativa. Obtemos, então $x = -7,4\ cm$.

b Ao chegar na posição de equilíbrio

Quando a mola comprimir esse tanto, o bloco entrará em repouso e estará mais quente, tendo em vista a dissipação de calor por conta do atrito.

c Dissipação da energia pelo atrito

A energia dissipada pelo atrito:

$$W_{atrito} = \mu_c.n.x = \mu_c.m.g.x = 0,5.5.9,8.(-0,074) \Rightarrow w_{atrito} = -1,81\ J$$

A energia incial, que é apenas cinética, é:

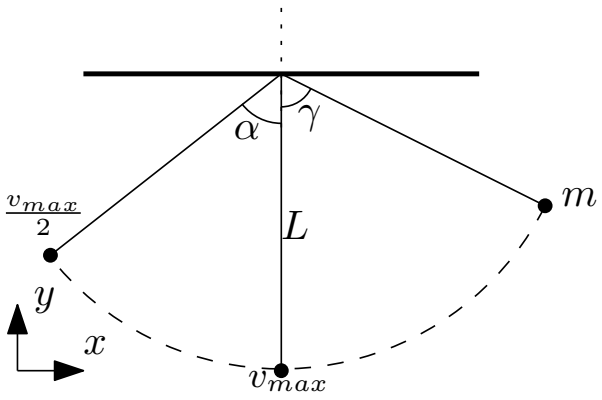
$$E_i = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.5.1^2 \Rightarrow E_i = 2,5\ J$$

Portanto, a razão entre as energias é:

$$\frac{|W_{atrito}|}{E_i} = \frac{1,81}{2,5} = 0,725$$

Ou seja, o atrito dissipa $72,5\%$ da energia inicial.

6.14 Oscilação de um pêndulo



A velocidade máxima é atingida quando a o pêndulo atinge a posição mais baixa, ou seja, quando todo o potencial gravitacional é convertido em energia cinética. Neste caso, teremos:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v_{max}^2 \Rightarrow v_{max} = \sqrt{2.g.h}$$

Perceba que não temos a altura inicial, mas temos o ângulo de abertura γ.

Supondo que o comprimento do fio é L, a altura h fica sendo:

$$h = L - L.cos(\gamma) = L.(1 - cos(\gamma))$$

Então:

$$v_{max} = \sqrt{2.g.L.(1 - cos(\gamma))}$$

Queremos então saber que ângulo o pêndulo forma com a vertical quando sua velocidade for $\frac{v_{max}}{2}$. Traduzindo isso para a equação de conservação de energia, o que queremos é:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.\left(\frac{v_{max}}{2}\right)^2 + m.g.h'$$

Isolando h', obtemos:

$$g.h = \frac{1}{2}.\left(\frac{v_{max}}{2}\right)^2 + g.h' \Rightarrow h = \frac{1}{2.g}.\left(\frac{v_{max}}{2}\right)^2 + h' \Rightarrow h' = h - \frac{1}{2.g}.\left(\frac{v_{max}}{2}\right)^2$$

$$h' = L.(1 - cos(\gamma)) - \frac{1}{2.g}.\frac{g.L.(1 - cos(\gamma))}{2} = \frac{3}{4}.L.(1 - cos(\gamma))$$

Perceba que h' pode ainda ser escrito da mesma forma que h foi anteriormente:

$$h' = L.(1 - cos(\alpha))$$

Sendo α exatamente o ângulo que queremos.

$$L.(1-cos(\alpha)) = \frac{3}{4}.L.(1-cos(\gamma)) \Rightarrow 1-cos(\alpha) = \frac{3}{4}.(1-cos(\gamma)) \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4}.cos(\gamma)$$

Como $\gamma = 60°$, obtemos que $cos(\alpha)$ é:

$$cos(\alpha) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.cos(60^\circ) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}.\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$$

Assim, concluímos que:

$$\alpha = arccos\left(\frac{5}{8}\right) = 51,3^\circ$$

CAPÍTULO

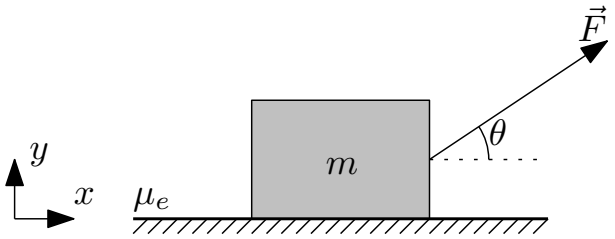
7

CONSERVAÇÃO DA ENERGIA NO MOVIMENTO GERAL

"A tarefa não é tanto ver o que ninguém viu ainda, mas pensar o que ninguém ainda pensou sobre aquilo que todo mundo vê. A verdadeira descoberta não está em novas terras, mas em novos olhos."

Arthur Schopenhauer

7.1 Trabalho da força mínima para manter o bloco em movimento



Aplicando a Segunda Lei de Newton na vertical, obtemos o valor da normal:

$$n + F.sen(\theta) - m.g = 0$$

$$n = m.g - F.sen(\theta) = P - F.sen(\theta)$$

O mesmo vale para a horizontal, já que buscamos F mínima para que a velocidade seja constante (aceleração nula):

$$F.cos(\theta) - \mu_e.n = 0$$

Substituindo o valor da normal n:

$$F.cos(\theta) - \mu_e.(P - F.sen(\theta)) = 0 \Rightarrow F.cos(\theta) - \mu_e.P + \mu_e.F.sen(\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F.(cos(\theta) + \mu_e.sen(\theta)) = \mu_e.P \Rightarrow F = \frac{\mu_e}{cos(\theta) + \mu_e.sen(\theta)}.P$$

Como só há deslocamento horizontal, o trabalho será:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \left(\frac{\mu_e}{cos(\theta) + \mu_e.sen(\theta)}.P.[cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y}] \right) \cdot l\ \hat{x}$$

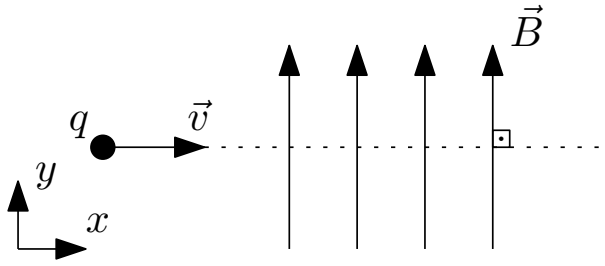
$$W = \frac{\mu_e}{cos(\theta) + \mu_e.sen(\theta)}.P.l.[cos(\theta)\ \hat{x} \cdot \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y} \cdot \hat{x}]$$

Lembre que $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$ e $\hat{y} \cdot \hat{x} = 0$. Por isso, o trabalho é:

$$W = \frac{\mu_e}{cos(\theta) + \mu_e.sen(\theta)}.P.l.cos(\theta)$$

Este trabalho é convertido em aumento de energia interna por conta do atrito.

7.2 Trabalho da força magnética sobre uma partícula



Pela definição da força magnética, a força sobre a partícula é:

$$\vec{F} = q.\vec{v} \times \vec{B} = q.v.B\ \hat{z} \Rightarrow F = q.v.B$$

Por conta do produto vetorial, o vetor resultante aponta para fora da página.

Como vimos, a força funcionará como uma resultante centrípeta, ou seja, a carga descreverá uma trajetória circular no plano xy, formando um ângulo $\theta = 90°$. Portanto:

$$W = F.d.cos(\theta) = F.d.cos(90°) = 0$$

7.3 Ângulo entre vetores arbitrários

A única coisa que sabemos é que $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$. Para facilitar as contas, vamos considerar $\vec{a}$ e $\vec{b}$ como vetores bidimensionais. Portanto:

$$\vec{a} = a_x\ \hat{x} + a_y\ \hat{y}$$

$$\vec{b} = b_x\ \hat{x} + b_y\ \hat{y}$$

Sendo assim, obtemos:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$$

Vamos calcular o módulo de ambos (que são iguais!):

$$|\vec{c}|=|\vec{d}| \Rightarrow \sqrt{(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2} = \sqrt{(a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2}$$

$$(a_x+b_x)^2+(a_y+b_y)^2 = (a_x-b_x)^2+(a_y-b_y)^2$$

$$(a_x^2+b_x^2+2.a_x.b_x)+(a_y^2+b_y^2+2.a_y.b_y) = (a_x^2+b_x^2-2.a_x.b_x)+(a_y^2+b_y^2-2.a_y.b_y)$$

$$(a_x^2+a_y^2)+(b_x^2+b_y^2)+2.(a_x.b_x+a_y.b_y) = (a_x^2+a_y^2)+(b_x^2+b_y^2)-2.(a_x.b_x+a_y.b_y)$$

$$a^2+b^2+2.(a_x.b_x+a_y.b_y) = a^2+b^2-2.(a_x.b_x+a_y.b_y)$$

$$4.(a_x.b_x+a_y.b_y) = 0 \Rightarrow a_x.b_x+a_y.b_y = 0$$

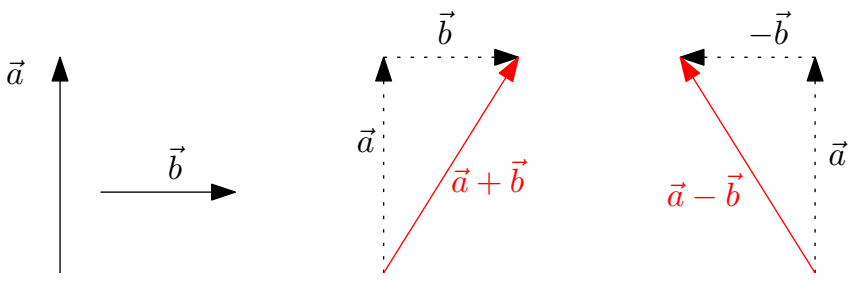
Lembre que $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x.b_x+a_y.b_y$. Com isso, mostramos que:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$$

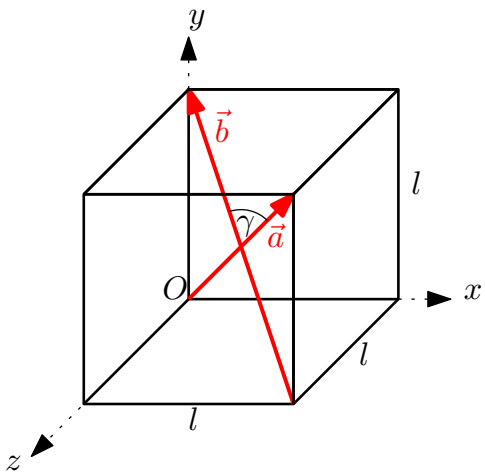
Ou seja:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a.b.cos(\theta) = 0 \Rightarrow cos(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = 90^\circ$$

Oque faz total sentido do ponto de vista geométrico!



7.4 Ângulo entre as diagonais de um cubo



O vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são:

$$\vec{a} = l\ \hat{x} + l\ \hat{y} + l\ \hat{z}$$

$$\vec{b} = -l\ \hat{x} + l\ \hat{y} - l\ \hat{z}$$

O módulo deles (comprimento do vetor) é igual:

$$a = b = \sqrt{l^2 + l^2 + l^2} = \sqrt{3}.l$$

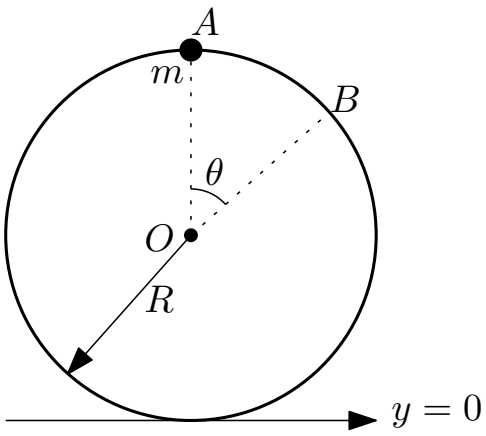
Pela definição do produto interno, obtemos:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a.b.cos(\gamma) \Rightarrow cos(\gamma) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a.b} = \frac{-l^2 + l^2 - l^2}{\sqrt{3}.l\ .\sqrt{3}.l} \Rightarrow \gamma = arccos\left(-\frac{1}{3}\right) = 109,5°$$

No gabarito, temos o valor do ângulo suplementar* de γ, que é $70,5°$.

*Lembre que o suplementar é definido como o ângulo φ tal que $\gamma + \varphi = 180°$.

7.5 Conta deslizando em aro circular



a Trabalho da força de reação

A força de reação é paralela à normal que atua sobre a conta, ou seja, aponta na direção $\hat{r}$ que forma um ângulo de 90° com o deslocamento. Por isso, o trabalho dessa força é nulo, pois

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F.d.cos(90°) = 0$$

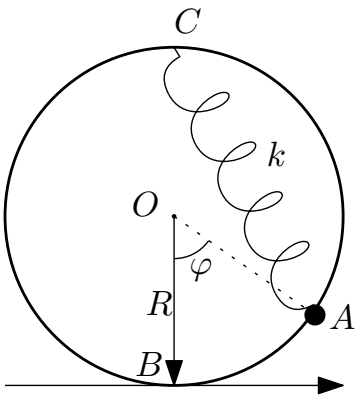
b Velocidade da conta em B

Inicialmente temos apenas potencial gravitacional, e depois temos energia cinética. Por conservação de energia, obtemos:

$$m.g.2.R = m.g.(R - R.cos(\theta)) + \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow m.g.R(1 - cos(\theta)) = \frac{1}{2}.m.v^2$$

$$v = \sqrt{2.g.R.(1 - cos(\theta))}$$

7.6 Corpo segurado por mola em aro circular



Primeiro, podemos calcular a altura que o corpo está inicialmente:

$$h = R - R.cos(\varphi) = R.(1 - cos(\varphi))$$

Pela Lei dos Cossenos, podemos calcular o comprimento da mola quando o corpo está em A.

$$l^2 = R^2+R^2-2.R.R.cos(\pi-\varphi) = R^2+R^2+2.R.R.cos(\varphi)$$

$$l = \sqrt{2.R^2 + 2.R^2.cos(\varphi)}$$

$$l = R.\sqrt{2.(1 + cos(\varphi))}$$

Quando relaxada, a mola estica até B, ou seja, inicialmente a mola está comprimida em:

$$\Delta l = 2.R - l = 2.R - R.\sqrt{2.(1 + cos(\varphi))} = R.(2 - \sqrt{2.(1 + cos(\varphi))})$$

Portanto, pela conservação de energia, obtemos:

$$\frac{1}{2}.k.\Delta l^2 + m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m}.\Delta l^2 + 2.g.h$$

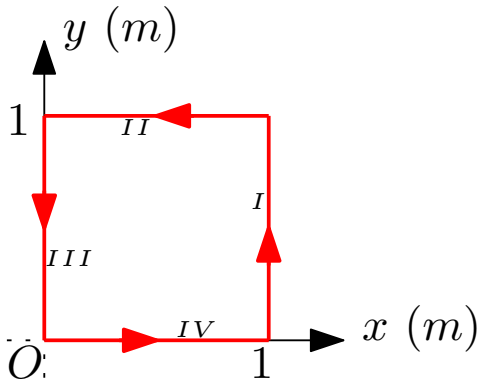
$$v^2 = \frac{k}{m}.R^2.(2 - \sqrt{2.(1 + cos(\varphi))})^2 + 2.g.R.(1 - cos(\varphi))$$

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}.R^2.(2 - \sqrt{2.(1 + cos(\varphi))})^2 + 2.g.R.(1 - cos(\varphi))}$$

Substituindo os valores:

$$v = \sqrt{\frac{200}{0,3}.1^2.(2 - \sqrt{2.(1 + cos(60°))})^2 + 2.9,8.1.(1 - cos(60°))} = 7,59\ \frac{m}{s}$$

7.7 Partícula se movendo em circuito quadrado



a Trabalho da força $\vec{F}_1 = 10.(y\ \hat{x} - x\ \hat{y})$

Para cada trecho do caminho quadrado, vale que $W = \int \vec{F}_1 \cdot d\vec{l}$. Então aplicaremos esta mesma ideia, mas 4 vezes (todo o circuito):

$$W_1 = \int_I \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{II} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{III} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{IV} \vec{F}_1 \cdot d\vec{l}$$

$$W_1 = \int_0^1 \vec{F}_1(1,y) \cdot d\vec{y} + \int_1^0 \vec{F}_1(x,1) \cdot d\vec{x} + \int_1^0 \vec{F}_1(0,y) \cdot d\vec{y} + \int_0^1 \vec{F}_1(x,0) \cdot d\vec{x}$$

$$W_1 = \int_0^1 10.(y\ \hat{x} - \hat{y}) \cdot d\vec{y} + \int_1^0 10.(\hat{x} - x\ \hat{y}) \cdot d\vec{x} + \int_1^0 10.(y\ \hat{x}) \cdot d\vec{y} + \int_0^1 10.(-x\ \hat{y}) \cdot d\vec{x}$$

Perceba que o produto interno das duas últimas integrais é nulo, pois os vetores são perpendiculares.

$$W_1 = \int_0^1 10.(y\ \hat{x} - \hat{y}) \cdot d\vec{y} + \int_1^0 10.(\hat{x} - x\ \hat{y}) \cdot d\vec{x}$$

$$W_1 = \int_0^1 -10\ dy + \int_1^0 10\ dx = -20\ J$$

b Agora a força é $\vec{F}_2 = 10.(y\ \hat{x} + x\ \hat{y})$

Faremos o mesmo processo do item anterior, a diferença é que agora a componente vertical da força é positiva.

$$W_2 = \int_I \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{II} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{III} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l} + \int_{IV} \vec{F}_2 \cdot d\vec{l}$$

$$W_2 = \int_0^1 \vec{F}_2(1,y) \cdot d\vec{y} + \int_1^0 \vec{F}_2(x,1) \cdot d\vec{x} + \int_1^0 \vec{F}_2(0,y) \cdot d\vec{y} + \int_0^1 \vec{F}_2(x,0) \cdot d\vec{x}$$

$$W_2 = \int_0^1 10.(y\ \hat{x} + \hat{y}) \cdot d\vec{y} + \int_1^0 10.(\hat{x} + x\ \hat{y}) \cdot d\vec{x} + \int_1^0 10.(y\ \hat{x}) \cdot d\vec{y} + \int_0^1 10.(x\ \hat{y}) \cdot d\vec{x}$$

Perceba que o produto interno das duas últimas integrais é nulo, pois os vetores são perpendiculares.

$$W_2 = \int_0^1 10.(y\ \hat{x} + \hat{y}) \cdot d\vec{y} + \int_1^0 10.(\hat{x} + x\ \hat{y}) \cdot d\vec{x}$$

$$W_2 = \int_0^1 10\ dy + \int_1^0 10\ dx = 0\ J$$

c Caráter conservativo das forças

Forças conservativas têm um trabalho total nulo em circuitos fechados, por isso apenas a força $\vec{F_2}$ é conservativa.

d Potencial associado à $\vec{F_2}$

Temos apenas duas componentes em $\vec{F_2}$, então o gradiente é:

$$\vec{F_2} = -\nabla U \Rightarrow 10.y\ \hat{x} + 10.x\ \hat{y} = -\frac{\partial}{\partial x}U\ \hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}U\ \hat{y}$$

Igualando as componentes que atuam na mesma direção, obtemos que $U = -10.x.y$

7.8 Partícula confinada em semi-espaço

a Forças atuando sobre a partícula

Como temos o potencial U, podemos calcular diretamente a força em cada direção com a relação $\vec{F} = -\nabla U$:

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{z}\right)U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{z}\right)\left(F_0.z + \frac{1}{2}.k.(x^2+y^2)\right)$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}.k.(x^2+y^2)\right]\,\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}.k.(x^2+y^2)\right]\,\hat{y} - \frac{\partial}{\partial z}[F_0.z]\,\hat{z}$$

$$\vec{F} = -k.x\,\hat{x} - k.y\,\hat{y} - F_0\,\hat{z}$$

b Tipo de força que atua sobre z

Obtemos que $F_z = F_0$, ou seja, uma força constante.

c Tipos de forças que atuam no plano xy

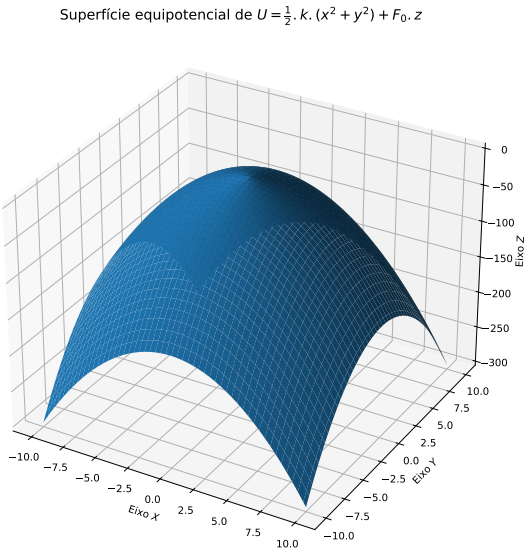
Ambas F_x e F_y são forças conservativas que respeitam a Lei de Hooke.

d Formato das equipotenciais

Nas regiões equipotenciais, temos $U(x,y,z) = C$ um valor constante qualquer:

$$U = F_0.z + \frac{1}{2}.k.(x^2+y^2) = C \Rightarrow F_0.z = -\frac{1}{2}.k.x^2 - \frac{1}{2}.k.y^2 + C \Rightarrow z = -\frac{1}{2.F_0}.k.x^2 - \frac{1}{2.F_0}.k.y^2 + \frac{C}{F_0}$$

Para, por exemplo, $C = 50\ J$, $F_0 = 100\ N$ e $k = 300\ \frac{N}{m}$, obtemos a seguinte superfície:



Um paraboloide de revolução!

7.9 Oscilador harmônico tridimensional

Podemos usar a relação $\vec{F} = -\nabla U$, assim:

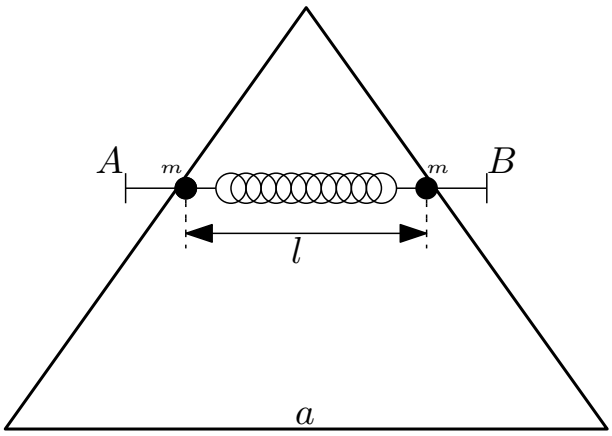
$$\vec{F} = -\nabla U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{z}\right)U = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\hat{x} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{y} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{z}\right)\left(\frac{1}{2}.k.(x^2+y^2+z^2)\right)$$

$$\vec{F} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}.k.(x^2+y^2+z^2)\right]\,\hat{x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}.k.(x^2+y^2+z^2)\right]\,\hat{y} - \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{2}.k.(x^2+y^2+z^2)\right]\,\hat{z}$$

$$\vec{F} = -k.x\hat{x} - k.y\hat{y} - k.z\hat{z} = -k.(\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}) = -k.\vec{r}$$

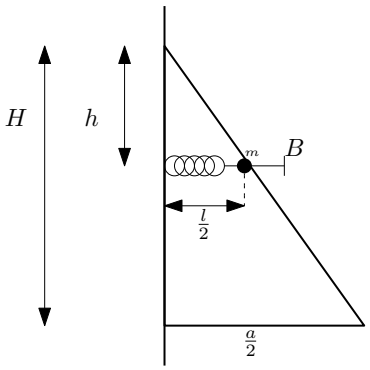
Como era de se prever, é uma força que segue a Lei de Hooke e as equipotenciais são esferas ($r = |\vec{r}|$ constante!).

7.10 Bolinhas em estrutura triangular rígida



a Energia potencial do sistema

Vamos dividir o triângulo ao meio, assim podemos aplicar semelhança de triângulos



Se o triângulo é equilátero, podemos calcular sua altura H com Pitágoras:

$$a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2 \Rightarrow H^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3}{4}.a^2 \Rightarrow H = \frac{\sqrt{3}}{2}.a$$

Por semelhança de triângulos, obtemos:

$$\frac{l}{2.h} = \frac{a}{2.H} \Rightarrow \frac{l}{h} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}.l$$

Podemos então expressar a energia potencial como[†]:

$$U = \frac{1}{2}.k.\Delta l^2 - (m+m).g.h = \frac{1}{2}.k.(l-l_0)^2 - 2.m.g.\frac{\sqrt{3}}{2}.l$$

$$U = \frac{1}{2}.k.(l-l_0)^2 - \sqrt{3}.m.g.l$$

b Condição de equilíbrio para o sistema

O sistema está em equilíbrio quando $F = -\frac{dU}{dl} = 0$. Aplicando essa condição, obtemos:

$$\frac{d}{dl}\left[\frac{1}{2}.k.(l-l_0)^2 - \sqrt{3}.m.g.l\right] = k.(l-l_0) - \sqrt{3}.m.g = 0 \Rightarrow l = \frac{\sqrt{3}.m.g}{k} + l_0$$

[†]Se consideramos o zero de potencial gravitacional no topo do triângulo.

c Máximo e mínimo valor de l

Na condição em que $l = l_0$, a energia potencial associada às massas é:

$$U(l_0) = \frac{1}{2}.k.(l_0 - l_0)^2 - \sqrt{3}.m.g.l_0 = -\sqrt{3}.m.g.l_0$$

Queremos que essa energia se converta novamente em energia elástica e potencial, ou seja,

$$-\sqrt{3}.m.g.l_0 = \frac{1}{2}.k.(l - l_0)^2 - \sqrt{3}.m.g.l = \frac{1}{2}.k.(l^2 + l_0^2 - 2.l.l_0) - \sqrt{3}.m.g.l$$

$$-\sqrt{3}.m.g.l_0 = \frac{1}{2}.k.l^2 + \frac{1}{2}.k.l_0^2 - \frac{1}{2}.k.2.l.l_0 - \sqrt{3}.m.g.l$$

$$\frac{1}{2}.k.l^2 + \frac{1}{2}.k.l_0^2 - \frac{1}{2}.k.2.l.l_0 - \sqrt{3}.m.g.l + \sqrt{3}.m.g.l_0 = 0$$

$$\frac{1}{2}.k.l^2 - (k.l_0 + \sqrt{3}.m.g).l + \sqrt{3}.m.g.l_0 + \frac{1}{2}.k.l_0^2 = 0$$

Encontramos uma Equação do Segundo Grau para l. Aplicando Bháskara, obtemos:

$$l = \frac{(k.l_0 + \sqrt{3}.m.g) \pm \sqrt{(k.l_0 + \sqrt{3}.m.g)^2 - 4.\frac{1}{2}.k.\left(\sqrt{3}.m.g.l_0 + \frac{1}{2}.k.l_0^2\right)}}{2.\frac{1}{2}.k}$$

$$l = \frac{(k.l_0 + \sqrt{3}.m.g) \pm \sqrt{k^2.l_0^2 + 3.m^2.g^2 + 2.k.l_0.\sqrt{3}.m.g - 2.\sqrt{3}.k.m.g.l_0 - k^2.l_0^2}}{k}$$

$$l = \frac{k.l_0 + \sqrt{3}.m.g \pm \sqrt{3}.m.g}{k}$$

Pegando as raízes negativa e positiva, respectivamente, teremos os comprimentos mínimo e máximo:

$$l_{min} = \frac{k.l_0 + \sqrt{3}.m.g - \sqrt{3}.m.g}{k} = l_0$$

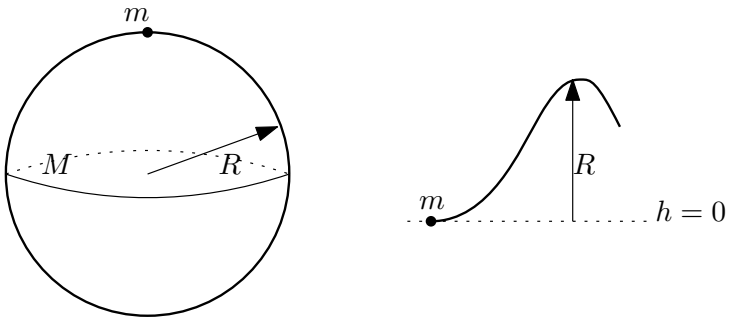
$$l_{max} = \frac{k.l_0 + \sqrt{3}.m.g + \sqrt{3}.m.g}{k} = \frac{k.l_0 + 2.\sqrt{3}.m.g}{k}$$

d Tipo de movimento do sistema

O movimento será um MHS (Movimento Harmônico Simples), por conta da conservação de energia, a amplitude de oscilação será:

$$A = l_{max} - l_{min} = \frac{2.\sqrt{3}.m.g}{k}$$

7.11 Trabalho para remover um objeto da atração gravitacional da Terra



1° caso 2° caso

No primeiro caso, temos que, inicialmente, o objeto deve ter uma energia cinética suficiente para atingir o potencial para sair da Terra, ou seja:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{G.m.M}{R} = 0 \Rightarrow v^2 = \frac{2.G.M}{R}$$

Pelo Teorema do Trabalho-Energia Cinética, sabendo que no final o objeto deve estar em repouso:

$$W = \Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}.m.v^2 = -\frac{1}{2}.m.\frac{2.G.M}{R} = -\frac{G.m.M}{R}$$

No segundo caso, temos algo análogo:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = m.g.h \Rightarrow v^2 = 2.g.h = 2.g.R$$

Pelo Teorema do Trabalho-Energia Cinética, obtemos:

$$W = \Delta K = K_f - K_i = -K_i = -\frac{1}{2}.m.v^2 = -\frac{1}{2}.m.2.g.R = -m.g.R$$

Lembre que $g = \frac{G.M}{R^2}$, assim:

$$W = \frac{-m.G.M.R}{R^2} = -\frac{G.m.M}{R}$$

7.12 Velocidade de escape da Lua

Queremos saber a energia cinética que um corpo deve ter para que a interação potencial com a Lua não seja mais relevante, ou seja:

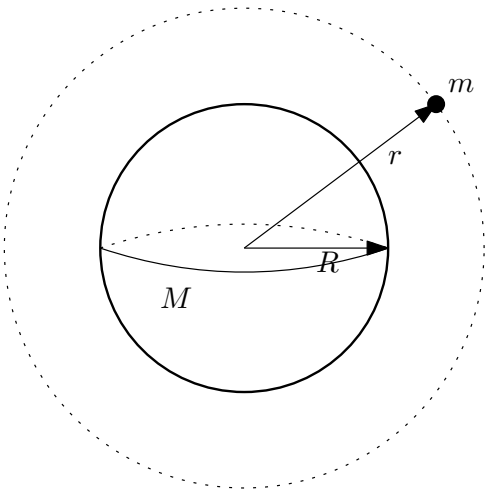
$$\frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{G.m.M}{R} = 0 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2.G.M}{R}}$$

Esta que é a velocidade de escape!

Substituindo os valores numéricos:

$$v = \sqrt{\frac{2.6,67.10^{-11}.7,35.10^{22}}{1738.10^3}} = 2375 \ \frac{m}{s} = 2,4 \ \frac{Km}{s}$$

7.13 Satélite síncrono



a Distância da Terra

Sabemos que a força de atração gravitacional funciona como resultante centrípeta. Logo, pela Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$\sum F = m.a_{rad} = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{G.m.M}{r^2} = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{G.M}{r} = v^2$$

Como a velocidade é constante, podemos expressá-la como $v = \frac{\Delta l}{\Delta t}$. Sabemos que o tempo total de uma volta é 24 h, e como se trata de um movimento circular, vale que $\Delta l = 2.\pi.r$.

Assim, obtemos:

$$\frac{G.M}{r} = \left(\frac{2.\pi.r}{\Delta t}\right)^2 \Rightarrow \frac{G.M}{r^3} = \left(\frac{2.\pi}{\Delta t}\right)^2 \Rightarrow r^3 = \frac{G.M.\Delta t^2}{4.\pi^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{G.M.\Delta t^2}{4.\pi^2}}$$

Substituindo os valores:

$$r = \sqrt[3]{\frac{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}.(24.3600)^2}{4.\pi^2}} = 4,22.10^7\ m = 4,22.10^4\ Km$$

Agora dividimos este valor pelo valor do raio da Terra, obtendo $r = 6,6.R$

b Velocidade inicial mínima

Inicialmente, temos que o corpo está com velocidade e submetido a um potencial gravitacional, no final estará em repouso e apenas com potencial gravitacional. Traduzindo isso para a conservação de energia, obtemos:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{G.m.M}{R} = -\frac{G.m.M}{r} \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{G.m.M}{R} - \frac{G.m.M}{r} \Rightarrow v^2 = 2.\left[\frac{G.M}{R} - \frac{G.M}{r}\right]$$

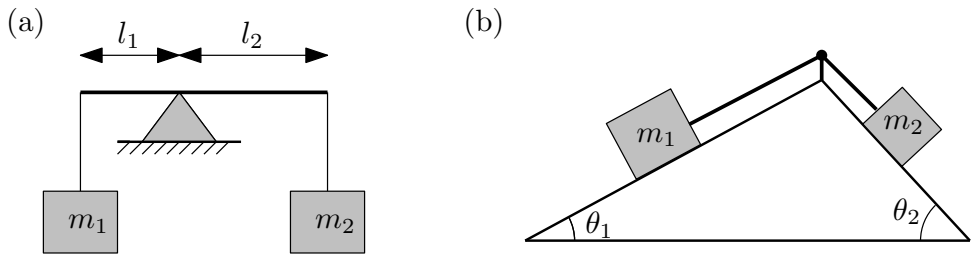
No item passado, calculamos exatamente $\frac{r}{R}$, então façamos surgir este termo na expressão:

$$v^2 = 2.\frac{G.M}{r}.\left[\frac{r}{R} - 1\right] \Rightarrow v = \sqrt{2.\frac{G.M}{r}.\left[\frac{r}{R} - 1\right]}$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$v = \sqrt{2.\frac{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}}{6,6.6,37.10^{6}}.[6,6-1]} = 1,03.10^{4}\ \frac{m}{s} = 10,3\ \frac{Km}{s}$$

7.14 Condições de equilíbrio



a Equilíbrio na alavanca

Aqui, a condição de equilíbrio é que a soma dos torques seja nula, ou seja

$$\sum \tau = 0$$

Sabendo que $\tau = F.l.sen(\theta)$, sendo θ o ângulo entre a força F e a distância l, obtemos:

$$\sum \tau = m_1.g.l_1 - m_2.g.l_2 = 0 \Rightarrow m_1.l_1 = m_2.l_2$$

b Equilíbrio no plano inclinado

Para o plano inclinado, a condição de equilíbrio é que a força horizontal sobre cada corpo seja nula:

$$\sum F_x = 0$$

Podemos aplicar a condição de equilíbrio para cada corpo separadamente. Para o corpo 1:

$$T - m_1.g.sen(\theta_1) = 0 \Rightarrow T = m_1.g.sen(\theta_1)$$

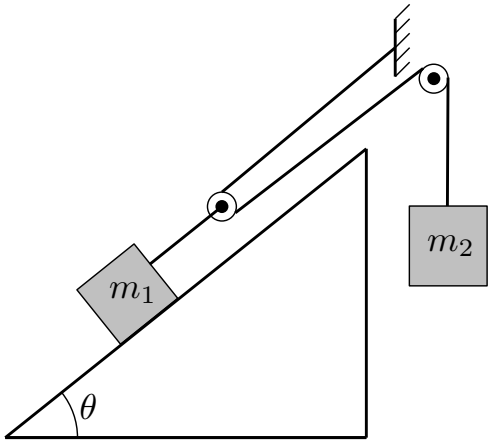
Para o corpo 2:

$$m_2.g.sen(\theta_2) - T = 0 \Rightarrow T = m_2.g.sen(\theta_2)$$

Como os corpos estão ligados pela mesma corda, vale que as tensões devem ser as mesmas. Por isso:

$$m_1.g.sen(\theta_1) = m_2.g.sen(\theta_2) \Rightarrow m_1.sen(\theta_1) = m_2.sen(\theta_2)$$

7.15 Vagão ligado por corda em plano inclinado



a Relação entre os deslocamentos, velocidades e acelerações

Como o bloco 1 está ligado a duas cordas, enquanto o bloco 2 está ligado apenas a uma, vale que:

$$2.l_1 + l_1 = cte \Rightarrow 2\Delta l_1 + \Delta l_2 = \Delta(cte) \Rightarrow 2.s_1 + s_2 = 0$$

Derivando obtemos as outras:

$$2.\frac{d}{dt}s_1 + \frac{d}{dt}s_2 = \frac{d}{dt}0 \Rightarrow 2.v_1 + v_2 = 0$$

$$2.\frac{d}{dt}v_1 + \frac{d}{dt}v_2 = \frac{d}{dt}0 \Rightarrow 2.a_1 + a_2 = 0$$

b Deslocamento ao longo do plano

Aplicando a conservação de energia, obtemos

$$m_1.g.\Delta h_1 + m_2.g.\Delta h_2 - \mu_c.n.\Delta s_1 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

Pela condição de equilíbrio, temos que $n = m_1.g.cos(\theta)$:

$$m_1.g.\Delta h_1 + m_2.g.\Delta h_2 - \mu_c.m_1.g.cos(\theta).\Delta s_1 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

Perceba que $\Delta h_1 = \Delta s_1.sen(\theta)$ e que $\Delta h_2 = \Delta s_2$, então:

$$m_1.g.\Delta s_1.sen(\theta) + m_2.g.\Delta s_2 - \mu_c.m_1.g.cos(\theta).\Delta s_1 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

Agora podemos usar as relações descobertas no item passado, assim podemos expressar tudo em função dos parâmetros do corpo 1:

$$m_1.g.\Delta s_1.sen(\theta) + m_2.g.(-2.\Delta s_1) - \mu_c.m_1.g.cos(\theta).\Delta s_1 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.(-2.v_1)^2$$

$$(m_1.g.sen(\theta) - 2.m_2.g - \mu_c.m_1.g.cos(\theta)).\Delta s_1 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + 2.m_2.v_1^2$$

$$\Delta s_1 = \frac{\frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + 2.m_2.v_1^2}{m_1.g.sen(\theta) - 2.m_2.g - \mu_c.m_1.g.cos(\theta)}$$

Como temos massa no numerador e denominador, não há problema colocar seus valores em toneladas, mas as velocidades devem estar em $\frac{m}{s}$:

$$\Delta s_1 = \frac{\frac{1}{2}.4.\left(\frac{4,5}{3,6}\right)^2 + 2.0,5.\left(\frac{4,5}{3,6}\right)^2}{4.9,8.sen(45°) - 2.0,5.9,8 - 0,5.4.9,8.cos(45°)} = 1,15\ m$$

7.16 Aceleração de um carro

Sabemos que a potência é uma grandeza diretamente associada à energia por unidade de tempo, ou seja:

$$P = \frac{E}{t}$$

Então podemos expressar a energia usada em função da potência P_M do carro:

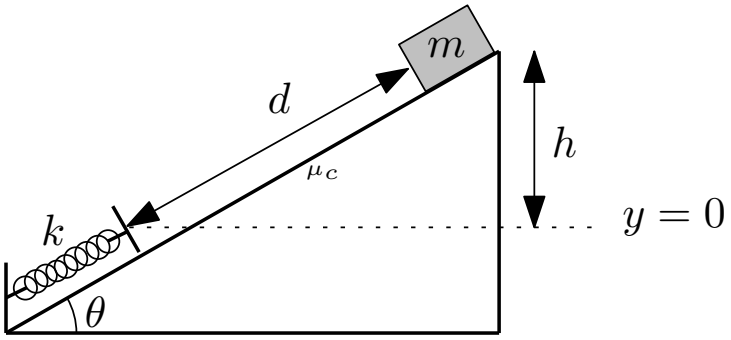
$$E = P.t = P_M.T$$

Inicialmente, o carro tem velocidade v_0 e após a energia E ser usada, o carro tem velocidade v, que é oque queremos saber. Por conservação de energia, teremos:

$$\frac{1}{2}.m.v_0^2 + E = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v^2 = v_0^2 + \frac{2.E}{m} \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + \frac{2.E}{m}} = \sqrt{v_0^2 + \frac{2.P_M.T}{m}}$$

7.17 Bloco em plano inclinado com atrito indo de encontro à mola

a Compressão da mola



Aplicando a condição de equilíbrio na vertical, coisa que já fizemos de forma exaustiva, podemos obter a força normal n:

$$n - m.g.cos(\theta) = 0 \Rightarrow n = m.g.cos(\theta)$$

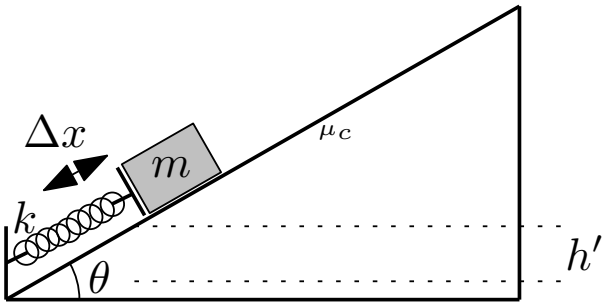
Inicialmente, por conservação de energia, podemos descobrir a velocidade inicial do bloco quando está quase encostando na mola:

$$m.g.h - \mu_c.n.d = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow m.g.d.sen(\theta) - \mu_c.m.g.cos(\theta).d = \frac{1}{2}.m.v^2$$

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = m.g.d(sen(\theta) - \mu_c.cos(\theta)) \Rightarrow v = \sqrt{2.g.d(sen(\theta) - \mu_c.cos(\theta))}$$

Como sabemos que $\theta = 45°$, então $sen(\theta) = cos(\theta)$ e portanto:

$$v = \sqrt{2.g.d.cos(\theta)(1 - \mu_c)}$$



Agora que estamos quase encostando na mola, podemos aplicar novamente a conservação de energia, mas agora conseguiremos calcular o quanto o bloco comprimiu a mola, ou seja, o valor do Δx:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h' - \mu_c.n.\Delta x = \frac{1}{2}.k.\Delta x^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.\Delta x.sen(\theta) - \mu_c.n.\Delta x = \frac{1}{2}.k.\Delta x^2$$

$$-\frac{1}{2}.k.\Delta x^2 + (m.g.sen(\theta) - \mu_c.n).\Delta x + \frac{1}{2}.m.v^2 = 0$$

Vamos só substituir os resultados obtidos anteriormente e organizar a equaçaõ, e também lembre que $sen(\theta) = cos(\theta)$.

$$-\frac{1}{2}.k.\Delta x^2 + (m.g.cos(\theta) - \mu_c.m.g.cos(\theta)).\Delta x + \frac{1}{2}.m.2.g.d.cos(\theta)(1-\mu_c) = 0$$

$$-\frac{1}{2}.k.\Delta x^2 + m.g.cos(\theta).(1-\mu_c).\Delta x + m.g.d.cos(\theta)(1-\mu_c) = 0$$

$$-\frac{k}{m}.\Delta x^2 + 2.g.cos(\theta).(1-\mu_c).\Delta x + 2.g.d.cos(\theta)(1-\mu_c)$$

Vamos substituir os valores dados no enunciado:

$$-\frac{800}{10}.\Delta x^2 + 2.9,8.cos(45°).(1-0,5).\Delta x + 2.9,8.2.cos(45°)(1-0,5)$$

$$-80.\Delta x^2 + 6,93.\Delta x + 13,86 = 0$$

Agora aplicamos Bháskara para descobrir o valor de Δx:

$$\Delta x = \frac{-6,93 \pm \sqrt{6,93^2 - 4.(-80).13,86}}{2.(-80)} = \frac{-6,93 \pm \sqrt{48,02 + 4435}}{-160}$$

Sabemos que $\Delta x < 0$, pois a mola está sendo comprimida. Então pegamos a solução negativa:

$$\Delta x = \frac{-6,93 - \sqrt{48,02 + 4435}}{-160} = 0,46\ m$$

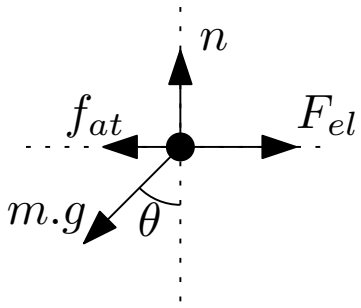
b Trabalho total dissipado pelo atrito

O trabalho total dissipado será a soma dos trabalhos dissipados ao percorrer d e Δx:

$$W = n.\mu_c.d + n.\mu_c.|\Delta x| = n.\mu_c.(d + \Delta x) = m.g.cos(\theta).\mu_c.(d + \Delta x)$$

$$W = 10.9,8.cos(45°).0,5.(2 + 0,46) = 85\ J$$

c Após a compressão da mola

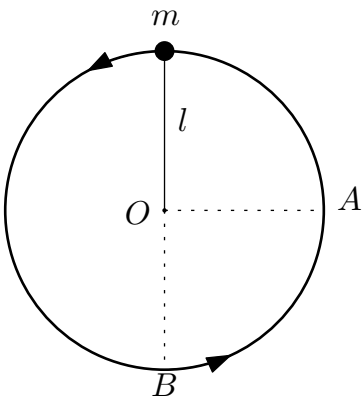


Após a compressão da mola, o bloco entrará em repouso, tendo em vista que sua energia cinética e potencial gravitacional estarão sendo dissipadas pelo atrito e convertida em potencial elástico. Se a força de atrito estático for menor que a força elástica, o bloco voltará a subir no plano inclinado, vamos verificar a soma das forças com auxílio de um diagrama de corpo livre:

$$F = F_{el} - \mu_s.n = k.\Delta x - \mu_s.m.g.cos(\theta) = 800.0,46 - 0,8.10.9,8.cos(45°) = 312,6\ N > 0$$

Após a compressão, o bloco voltará a subir no plano!

7.18 Bolinha amarrada a fio



a Velocidade mínima no ponto B

Quando está no topo, sobre a massa m atuarão duas forças na vertical: peso e tensão, a soma delas será nossa resultante centrípeta. A velocidade mínima para que a massa consiga passar pelo topo sem cair é dada quando a tensão na corda é nula. Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$T + m.g = m.g = m.a_{rad} = m.\frac{v^2}{l} \Rightarrow v = \sqrt{l.g}$$

Por conservação de energia podemos descobrir a velocidade v_B em B para que a massa m precisa ter para que chegue com v no topo:

$$\frac{1}{2}m.v_B^2 = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.2.l = \frac{1}{2}.m.l.g + m.g.2.l = \frac{5}{2}.m.g.l \Rightarrow v_B = \sqrt{5.g.l}$$

$$v_B = \sqrt{5.9,8.1} = 7,0\ \frac{m}{s}$$

b Valor da massa m

Por conservação da energia, podemos verificar a velocidade da massa m quando chega em A, pois já sabemos o valor de v_B:

$$\frac{1}{2}.m.v_B^2 = \frac{1}{2}.m.v_A^2 + m.g.l \Rightarrow v_B^2 = v_A^2 + 2.g.l \Rightarrow 5.g.l = v_A^2 + 2.g.l \Rightarrow v_A = \sqrt{3.g.l}$$

Agora podemos aplicar a Segunda Lei de Newton para os pontos A e B, em ambos os casos a força na direção radial nos dará a resultante centrípeta:

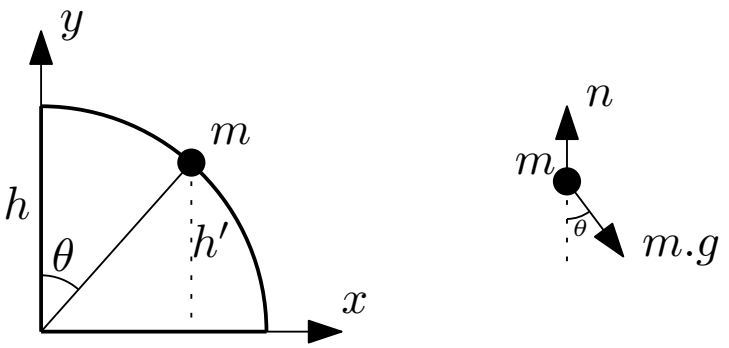
$$T_A = m.a_{rad} = m.\frac{v_A^2}{l} = 3.m.g$$

$$T_B - m.g = m.a_{rad} = m.\frac{v_B^2}{l} \Rightarrow T_B = 5.m.g + m.g = 6.m.g$$

Não sabemos quanto valem as tensões, mas sabemos a diferença entre elas!

$$T_B - T_A = 4,41 = 6.m.g - 3.m.g = 3.m.g \Rightarrow m = \frac{4,41}{3.g} = \frac{4,41}{3.9,8} = 0,150\ Kg = 150\ g$$

7.19 Esquimó no iglu



a Altura da queda do esquimó

Vamos imaginar que o esquimó se desgruda do iglu ao atingir a altura h'. Podemos, com conservação da energia, calcular sua velocidade ao atingir esta altura:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h' = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.h.cos(\theta) \Rightarrow 2.g.h = v^2 + 2.g.h.cos(\theta)$$

$$v^2 = 2.g.h.(1 - cos(\theta))$$

Ao atingir a altura h', podemos aplicar a Segunda Lei de Newton. Sabendo que a força resultante na direção radial será uma resultante centrípeta, obtemos:

$$n - m.g.cos(\theta) = -m.a_{rad} = -m.\frac{v^2}{h}$$

Perceba que a condição física para que o esquimó se desprenda do iglu é que $n = 0$, ou seja, que a superfície do iglu não exerça mais força sobre ele[‡].

$$m.g.cos(\theta) = m.\frac{v^2}{h} = \frac{m}{h}.2.g.h.(1 - cos(\theta)) = m.2.g.(1 - cos(\theta))$$

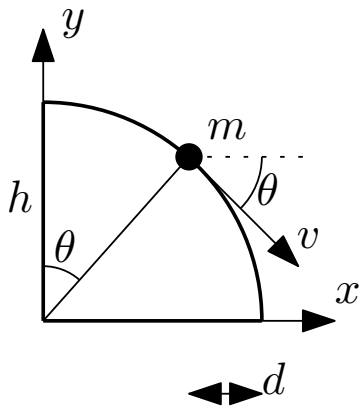
$$cos(\theta) = 2 - 2.cos(\theta) \Rightarrow cos(\theta) = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta = arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2^\circ$$

Já temos a expressão para h' (altura da queda), assim obtemos:

$$h' = h.cos(\theta) = 3.\frac{2}{3} = 2\ m$$

[‡]O sinal de menos na aceleração radial se mostra necessário, pois segundo nosso eixo de coordenadas o eixo z sai da página, mas o vetor de aceleração angular está entrando!

b Distância horizontal percorrida



Podemos calcular o módulo v da velocidade em h':

$$v = \sqrt{2.g.h.(1 - cos(\theta))} = \sqrt{2.9,8.3.\left(1 - \frac{2}{3}\right)} = \sqrt{19,6}\ \frac{m}{s}$$

Vamos decompor o vetor velocidade:

$$\vec{v} = v.cos(\theta)\ \hat{x} - v.sen(\theta)\ \hat{y} = \sqrt{19,6}.cos(48,2°)\ \hat{x} - \sqrt{19,6}.sen(48,2°)\ \hat{y}$$

Pela equação horária da posição vertical, podemos descobrir quanto tempo leva para que o esquimó atinja o chão:

$$\Delta y = v_{0y}.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow -h' = -\sqrt{19,6}.sen(48,2°).t - \frac{1}{2}.g.t^2$$

$$-\frac{1}{2}.9,8.t^2 - \sqrt{19,6}.sen(48,2°).t + h' = 0 \Rightarrow -4,9.t^2 - 3,3.t + 2 = 0$$

Como obtivemos uma equação do segundo grau para t, podemos aplicar Bháskara:

$$t = \frac{3,3 \pm \sqrt{3,3^2 - 4.(-4,9).2}}{2.(-4,9)} = \frac{3,3 \pm 7,08}{-9,8}$$

Como $t > 0$, pegamos a solução negativa:

$$t = \frac{3,3 - 7,08}{-9,8} = 0,386\ s$$

Nesse período de tempo, a distância total percorrida pelo menino é:

$$\Delta x = v_{0x}.t = \sqrt{19,6}.cos(48,2°).0,386 = 1,14\ m$$

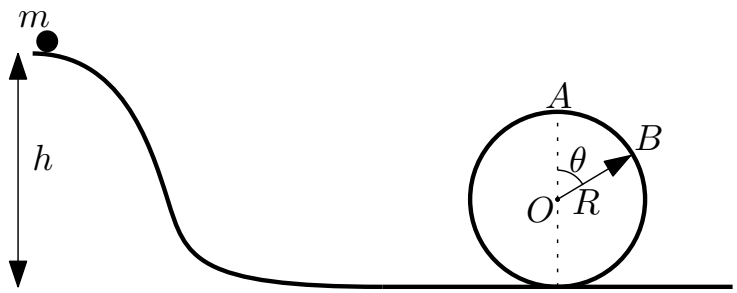
Porém, queremos a distância que o esquimó cai da parede do iglu, e não o deslocamento horizontal total. Por isso, do valor Δx deve ser removido o comprimento d:

$$d = h - h.sen(\theta) = h.(1 - sen(\theta)) = 3.(1 - sen(48,2°)) = 0,764\ m$$

Portanto, a distância da parede é:

$$\Delta x - d = 1,14 - 0,764 = 0,37\ m$$

7.20 Carrinho no parque de diversões



a Menor valor de altura inicial h_1 para fazer o *looping*

Considerando a força peso como a resultante centrípeta no topo do *looping* e aplicando a Segunda Lei de Newton, verificamos que a velocidade mínima é $v_{min} = \sqrt{g.R}$.

Quando partimos do repouso de uma altura h_1, a velocidade na base do *looping* é:

$$m.g.h_1 = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h_1}$$

Precisamos garantir que ao subir, na altura $2.R$, a velocidade seja v_{min}:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = m.g.(2.R) + \frac{1}{2}.m.v_{min}^2 \Rightarrow m.g.h_1 = 2.m.g.R + \frac{1}{2}.m.g.R \Rightarrow h_1 = \frac{5}{2}.R$$

b Valor da distância angular até o topo

Lembre que se o bloco caiu a normal foi à zero. Logo, a resultante centrípeta é simplesmente a componente radial do peso do carrinho:

$$F_{cp} = m.a_{rad} = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow m.g.cos(\theta) = m.\frac{v^2}{R} \Rightarrow cos(\theta) = \frac{v^2}{g.R}$$

Partimos de h em repouso, por conservação de energia, obtemos:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.H = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.(R + R.cos(\theta)) \Rightarrow g.h = \frac{1}{2}.v^2 + g.R.(1 + cos(\theta))$$

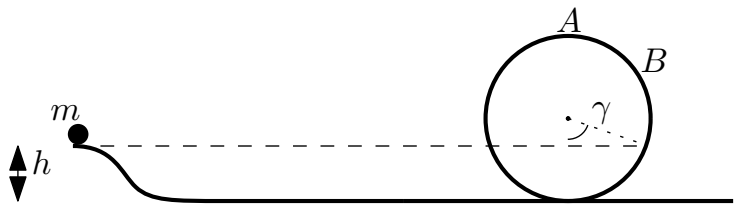
$$\frac{1}{2}.v^2 = g.h - g.R.(1 + cos(\theta)) \Rightarrow v^2 = 2.g.(h - R.[1 + cos(\theta)])$$

Substituindo na expressão obtida a partir da Segunda Lei de Newton:

$$cos(\theta) = \frac{2.g.(h - R.[1 + cos(\theta)])}{g.R} = \frac{2.h}{R} - 2 - 2.cos(\theta) \Rightarrow 3.cos(\theta) = 2.\left(\frac{h}{R} - 1\right)$$

$$cos(\theta) = \frac{2}{3}.\left(\frac{h}{R} - 1\right) \Rightarrow \theta = arccos\left[\frac{2}{3}.\left(\frac{h}{R} - 1\right)\right]$$

c Se a altura de lançamento for menor que o raio do *looping*



Por conservação de energia, o carrinho ficará oscilando em MHS. Podemos calcular o ângulo γ formado entre a altura máxima do carrinho com a vertical. Vale o resultado obtido anteriormente:

$$cos(\gamma) = \frac{v^2}{g.R} \Rightarrow v^2 = g.R.cos(\gamma)$$

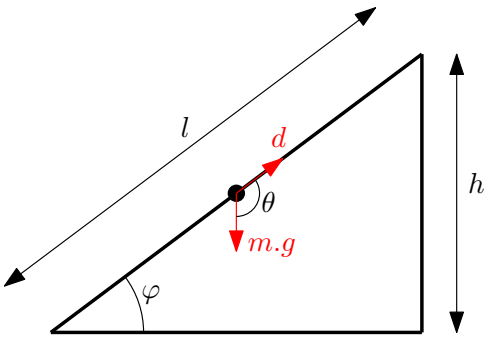
Por conservação de energia, obtemos:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 + m.g.(R - R.cos(\gamma)) = \frac{1}{2}.m.g.R.cos(\gamma) + m.g.(R - R.cos(\gamma))$$

$$m.g.h = m.g.R - \frac{1}{2}.m.g.R.cos(\gamma) \Rightarrow \frac{1}{2}.m.g.R.cos(\gamma) = m.g.R - m.g.h$$

$$cos(\gamma) = 2.\left(1 - \frac{h}{R}\right) \Rightarrow \gamma = arccos\left[2.\left(1 - \frac{h}{R}\right)\right]$$

7.21 Escada rolante



Pela geometria do problema, podemos afirmar que:

$$\varphi + (180° - \theta) = 90° \Rightarrow \theta = \varphi + 90°$$

Aplicando o $sen(\varphi)$, obtemos:

$$sen(\varphi) = \frac{h}{l} \Rightarrow \varphi = arcsen\left(\frac{h}{l}\right) = arcsen\left(\frac{7,5}{12}\right) = 38,68°$$

a Potência da escada rolante

Pela definição de trabalho, temos que $W = F.d.cos(\theta)$. Com isso, obtemos

$$W = m.g.l.cos(\theta)$$

Isso para 1 pessoa, mas no total temos 100. Portanto:

$$W_T = 100.m.g.l.cos(\theta) = 100.70.9,8.12.cos(36,68° + 90°) = -5,145.10^5\ J$$

O valor é negativo pois, na verdade, esse é o trabalho da força da gravidade no percurso, que é, em módulo, igual ao da escada rolante para que a pessoa suba com velocidade constante.

Como potência é trabalho por unidade de tempo, obtemos:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = \frac{5,145.10^5}{60} = 8575\ W$$

b Trabalho sobre homem que sobe mais rapidamente

O interessante da potência é que ela se mantém constante e pode ser escrita em função da força aplicada e da velocidade:

$$P = \frac{|W|}{\Delta t} = |\vec{F}\cdot\vec{v}| \Rightarrow |W| = \Delta t.F.v.|cos(\theta)| = \Delta t.m.g.v.|cos(\theta)| = 10.70.9,8.0,6.|cos(36,68° + 90°)|$$

$$|W| = 2573\ J$$

c Homem correndo na escada

Claro. O que acontece é que o trabalho exercido pelo homem é exatamente o mesmo que o exercido pela escada, deixando-o em repouso.

Expressando novamente a potência em função da velocidade, obtemos:

$$P = |\vec{F}\cdot\vec{v}| = F.v.|cos(\theta)| = m.g.v.|cos(\theta)| = 70.9,8.0,6.|cos(36,68° + 90°)| = 257\ W$$

CAPÍTULO

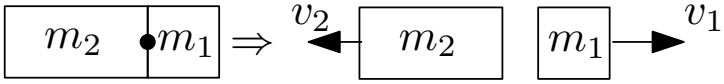
8

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO

"A filosofia é uma batalha contra o enfeitiçamento de nossa inteligência por meio da linguagem. O filósofo deve desembaraçar os nós do pensamento que a própria linguagem criou, e isso exige uma paciência infinita, pois as palavras muitas vezes nos enganam."

Ludwig Wittgenstein

8.1 Separando veículos espaciais



Toda a energia de movimento vem da explosão da bomba. Por conservação de energia, temos que:

$$\frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 = E_{exp} = 3000\ J \Rightarrow m_1.v_1^2 + m_2.v_2^2 = 6000$$

Lembre-se que o momento linear total também se conserva, logo vale que:

$$0 = p_1 + p_2 \Rightarrow m_1.v_1 + m_2.v_2 = 0$$

Podemos isolar a velocidade do veículo 2 da equação de conservação do momento linear:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}.v_1$$

Substituindo na conservação de energia:

$$m_1.v_1^2 + m_2.\left(-\frac{m_1}{m_2}.v_1\right)^2 = 6000 \Rightarrow m_1.v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}.v_1^2 = \left(m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}\right).v_1^2 = 6000$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{6000}{m_1 + \frac{m_1^2}{m_2}}} = \sqrt{\frac{6000}{1000 + \frac{1000^2}{2000}}} = 2,0\ \frac{m}{s}$$

Da equação de conservação do momento linear, obtemos:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}.v_1 = -\frac{1000}{2000}.2,0 = -1,0\ \frac{m}{s}$$

Portanto, a velocidade relativa fica sendo:

$$v_{1/2} = v_1 - v_2 = 2,0 + 1,0 = 3,0\ \frac{m}{s}$$

8.2 Análise do disparo de um atirador

a Velocidade de recuo da arma

Inicialmente temos o sistema rifle-bala em repouso, e depois a bala é disparada. Por conservação do momento linear total, temos que:

$$0 = p_{rifle} + p_{bala} \Rightarrow m_r.v_r + m_b.v_b = 0 \Rightarrow v_r = -\frac{m_b}{m_r}.v_b = -\frac{0,015}{2}.800 = -6,0\ \frac{m}{s}$$

b Impulso transmitido ao ombro do atirador

Pelo Teorema do Impulso-Momento linear, temos que:

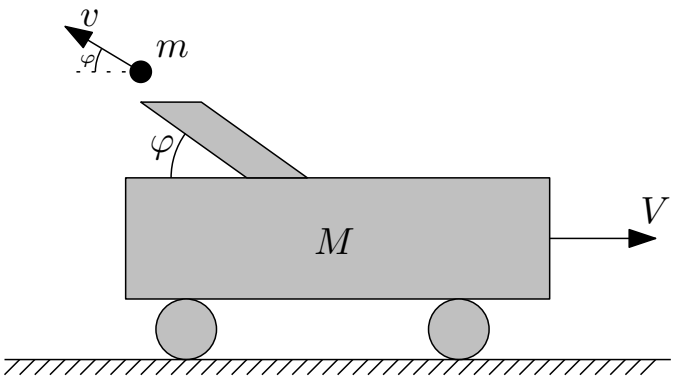
$$J = \Delta p = p_f - p_i = p_{rifle} = m_r.v_r = 2.(-6,0) = -12,0\ N.s$$

c Força média sobre o ombro

Podemos expressar o impulso em função da força média e tempo de aplicação da mesma, como sabemos o tempo, podemos descobrir o valor da força média:

$$J = F_M.\Delta t \Rightarrow F_M = \frac{J}{\Delta t} = \frac{-12,0}{0,05} = -240,0\ N$$

8.3 Carreta carregando canhão



a Velocidade inicial da carreta

O sistema está todo em repouso inicialmente e depois a bala de canhão é atirada, fazendo o caminhão se mover horizontalmente. Então por conservação momento linear total no eixo horizontal, obtemos:

$$0 = P+p \Rightarrow M.V+m.v.cos(\varphi) = 0 \Rightarrow V = -\frac{m}{M}.v.cos(\varphi) = -\frac{50}{5000}.300.cos(30°) = -2,60\ \frac{m}{s}$$

b Distância percorrida pela carreta

Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos a aceleração impressa sobre a carreta*:

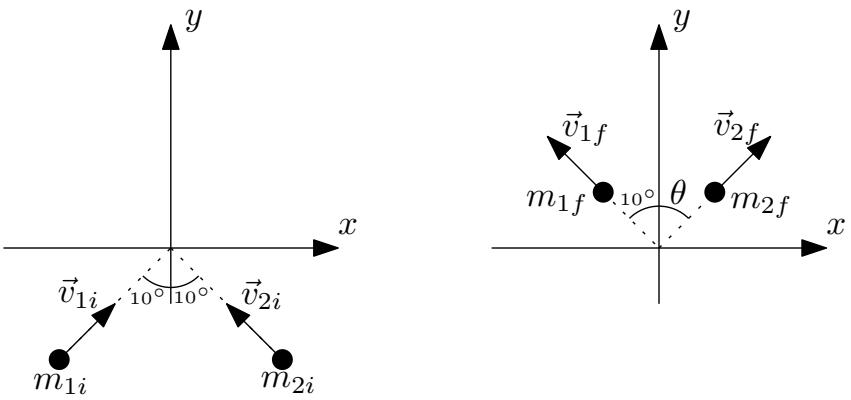
$$\sum F_x = -\mu_c.n = -\mu_c.m.g = m.a_x \Rightarrow a_x = -\mu_c.g$$

Aplicando Torricelli, podemos isolar o deslocamento, que é oque queremos:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a_x.\Delta x \Rightarrow 0^2 = V^2 - 2.\mu_c.g.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{V^2}{2.\mu_c.g} = \frac{2,6^2}{2.0,7.9,8} = 0,49\ m$$

*Pela condição de equilíbrio na vertical, sabemos que $n = m.g$

8.4 Patinadores no gelo



a Direção do patinador após o lançamento da bola

As variáveis com índices 1 e 2 dizem respeito à mulher e ao homem, respectivamente, e os índices i e f se referem às condições iniciais e finais, respectivamente.

Sendo v_0 o módulo da velocidade inicial, os vetores de momento linear são:

$$\vec{p}_{1i} = m_{1i}.\vec{v}_{1i} = m_{1i}.v_0.(sen(10^\circ)\ \hat{x} + cos(10^\circ)\ \hat{y})$$

$$\vec{p}_{2i} = m_{2i}.\vec{v}_{2i} = m_{2i}.v_0.(-sen(10^\circ)\ \hat{x} + cos(10^\circ)\ \hat{y})$$

Agora, após a passagem da bola, sabemos o vetor velocidade de 1 (digamos que o módulo é v_1), mas não de 2:

$$\vec{p}_{1f} = m_{1f}.\vec{v}_{1f} = m_{1f}.v_1.(-sen(10^\circ)\ \hat{x} + cos(10^\circ)\ \hat{y})$$

$$\vec{p}_{2f} = m_{2f}.\vec{v}_{2f}$$

Como não há atrito, o vetor momento linear total deve se conservar. Portanto:

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} \Rightarrow \vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + m_{2f}.\vec{v}_{2f} \Rightarrow \vec{v}_{2f} = \frac{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} - \vec{p}_{1f}}{m_{2f}}$$

Vamos juntar os termos de cada vetor que atuam na mesma direção:

$$\vec{v}_{2f} = \frac{[m_{1i}.v_0 - m_{2i}.v_0 + m_{1f}.v_1].sen(10^\circ)\ \hat{x} + [m_{1i}.v_0 + m_{2i}.v_0 - m_{1f}.v_1].cos(10^\circ)\ \hat{y}}{m_{2f}}$$

$$\vec{v}_{2f} = \left[\frac{m_{1i}.v_0 - m_{2i}.v_0 + m_{1f}.v_1}{m_{2f}}\right].sen(10^\circ)\ \hat{x} + \left[\frac{m_{1i}.v_0 + m_{2i}.v_0 - m_{1f}.v_1}{m_{2f}}\right].cos(10^\circ)\ \hat{y}$$

Assim, analisando o vetor resultante obtido, concluímos que $\theta = 10^\circ$.

b Módulo do vetor velocidade após o lançamento

Vamos aplicar a fórmula do módulo de um vetor diretamente e substituir os valores:

$$v_{2f} = \sqrt{v_{2f_x}^2 + v_{2f_y}^2}$$

$$v_{2f} = \sqrt{\left[\frac{m_{1i}.v_0 - m_{2i}.v_0 + m_{1f}.v_1}{m_{2f}}\right]^2 .sen^2(10^\circ) + \left[\frac{m_{1i}.v_0 + m_{2i}.v_0 - m_{1f}.v_1}{m_{2f}}\right]^2 .cos^2(10^\circ)}$$

$$v_{2f} = \sqrt{\left[\frac{51.0,5 - 51.0,5 + 50.0,51}{52}\right]^2 .sen^2(10^\circ) + \left[\frac{51.0,5 + 51.0,5 - 50.0,51}{52}\right]^2 .cos^2(10^\circ)}$$

$$v_{2f} = 0,49 \ \frac{m}{s}$$

c Momento transferido ao patinador

O momento linear transferido ao patinador é aquele momento linear $\vec{p}$ que o faz sair de $\vec{p}_{2i}$ e ir para $\vec{p}_{2f}$. Matematicamente, isso é:

$$\vec{p}_{2i} + \vec{p} = \vec{p}_{2f} \Rightarrow \vec{p} = \vec{p}_{2f} - \vec{p}_{2i} = m_{2f}.\vec{v}_{2f} - m_{2i}.\vec{v}_{2i}$$

Vamos juntar as componentes que atuam na mesma direção:

$$\vec{p} = m_{2f}.0,49.(sen(10^\circ)\ \hat{x} + cos(10^\circ)\ \hat{y}) - m_{2i}.0,5.(-sen(10^\circ)\ \hat{x} + cos(10^\circ)\ \hat{y})$$

$$\vec{p} = [m_{2f}.0,49 + m_{2i}.0,5].sen(10^\circ)\ \hat{x} + [m_{2f}.0,49 - m_{2i}.0,5].cos(10^\circ)\ \hat{y}$$

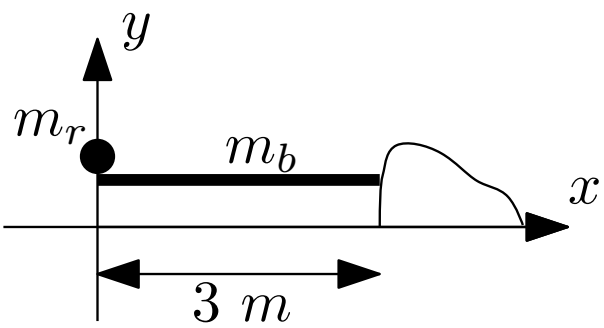
$$\vec{p} = [52.0,49 + 51.0,5].sen(10^\circ)\ \hat{x} + [52.0,49 - 51.0,5].cos(10^\circ)\ \hat{y} = 8,86\ \hat{x}$$

d Direção de lançamento da bola

O valor do momento calculado no item anterior nos deu exatamente o momento linear da bola! Com ele, fica fácil calcular a velocidade da mesma:

$$\vec{p} = m.\vec{v} \Rightarrow \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} = \frac{8,\vec{86}\ \hat{x}}{1} = 8,86\ \hat{x}\ \frac{m}{s}$$

8.5 Remador na canoa



Vamos calcular a posição inicial do centro de massa do sistema remador-canoa. Como a canoa é todo feito do mesmo material, podemos considerar que sua massa está toda concentrada no seu centro:

$$x_{cm} = \frac{m_r.x_r + m_c.x_c}{m_r + m_c} = \frac{75.0 + 150.\frac{3}{2}}{75 + 150} = 1\ m$$

Como a soma das forças externas é nula, a posição do centro de massa não deve se alterar ao remador se mover na canoa. Vamos usar índices 2 apenas para deixar claro que agora estamos falando de posições distintas, agora o remador (e a canoa) irá se mover!

$$x_{cm} = \frac{m_r.x_{2r} + m_c.x_{2c}}{m_r + m_c}$$

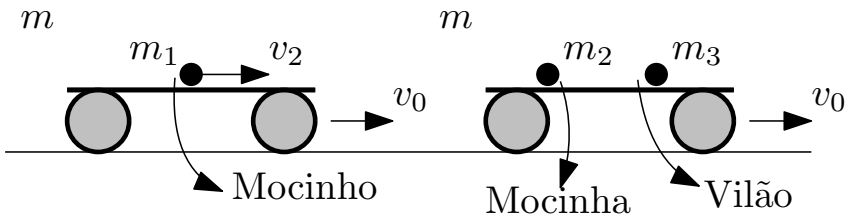
O problema não é tão simples quanto parece, como o remador anda para $+x$ e a canoa, por conservação do centro de massa, andará para $-x$, a posição do remador ao chegar na outra extremidade da canoa **não** é $3\ m$, pois a canoa também se moveu. Podemos expressar a posição do remador em função da diferença de posições, pois independentemente de quanto a canoa ande, queremos que $x_{2r} - x_{2c} = \frac{3}{2}$ (metade do comprimento da canoa).

$$x_{cm} = \frac{m_r.\left(\frac{3}{2} + x_{2c}\right) + m_b.x_{2c}}{m_r + m_c} \Rightarrow (m_r + m_c).x_{cm} = m_r.\frac{3}{2} + (m_r + m_c).x_{2c}$$

$$x_{2c} = x_{cm} - \frac{3}{2}.\frac{m_r}{m_r + m_c} = 1 - \frac{3}{2}.\frac{75}{75 + 150} = 0,5\ m$$

Como o centro da canoa antes estava em $\frac{3}{2}\ m$ e agora está em $0,5\ m$. Portanto, a distância da beira da canoa à proa é de $\frac{3}{2} - 0,5 = 1\ m$. O remador estica o braço 80 cm, ou seja, faltará 20 cm para que ele alcance a estaca!

8.6 Perseguição na mina abandonada



Vamos primeiro considerar apenas o carro do mocinho. Como o momento linear total se conserva, vale que:

$$(m + m_1).v_0 = m.v_1 + m_1.v_2$$

Segundo o enunciado, há uma relação entre a velocidade v_2 e a velocidade v_1, que é $v_{2/1} = v_2 - v_1 = 6,0\ \frac{m}{s}$:

$$(m + m_1).v_0 = m.v_1 + m_1.(v_{2/1} + v_1) \Rightarrow (m + m_1).v_1 = (m + m_1).v_0 - m_1.v_{2/1}$$

$$v_1 = \frac{(m + m_1).v_0 - m_1.v_{2/1}}{m + m_1} = \frac{(540 + 60).10 - 60.6}{540 + 60} = 9,4\ \frac{m}{s}$$

Com isso, podemos descobrir a velocidade com que o mocinho sai do carro:

$$v_2 = v_{2/1} + v_1 = 6 + 9,4 = 15,4\ \frac{m}{s}$$

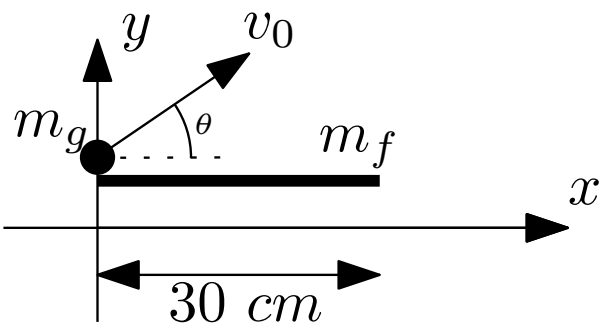
Agora vamos analisar o momento linear do carro em que o vilão e a mocinha estão. O momento linear total também deve ser conservado:

$$(m + m_2 + m_3).v_0 + m_1.v_2 = (m + m_1 + m_2 + m_3).v_3$$

Só falta conhecermos v_3, portanto a isolamos:

$$v_3 = \frac{(m + m_2 + m_3).v_0 + m_1.v_2}{m + m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(540 + 50 + 70).10 + 60.15,4}{540 + 60 + 50 + 70} = 10,4\ \frac{m}{s}$$

8.7 Gafanhoto em folha



Inicialmente podemos calcular a posição do centro de massa do sistema gafanhoto-folha. Podemos considerar que toda a massa da folha está no seu centro:

$$x_{cm} = \frac{m_g.x_g + m_f.x_f}{m_g + m_f} = \frac{0,001.0 + 0,004.0,15}{0,001 + 0,004}$$

$$x_{cm} = 0,12\ m$$

Nosso problema agora se assemelha ao problema do Remador na canoa. A diferença entre a posição do gafanhoto e da folha, após o pulo, deve ser $x_{2g} - x_{2f} = 0,15\ m$ (metade do comprimento da folha). Então, como não há forças externas, o centro de massa se conserva:

$$x_{cm} = \frac{m_g.x_{2g} + m_f.x_{2f}}{m_g + m_f} = \frac{m_g.(0,15 + x_{2f}) + m_f.x_{2f}}{m_g + m_f} = \frac{m_g}{m_g + m_f}.0,15 + x_{2f}$$

$$x_{2f} = x_{cm} - \frac{m_g}{m_g + m_f}.0,15 = 0,12 - \frac{0,001}{0,001 + 0,004}.0,15 = 0,09\ m$$

Lembre que x_{2f} é a posição do centro da folha após o pulo do gafanhoto. Logo, a extremidade da folha que antes estava em $0,3\ m$ agora está em $0,09 + 0,15 = 0,24\ m$. Ou seja, o gafanhoto deve, ao pular, alcançar uma distância de $0,24\ m$. Lembre que a equação do Alcance obtida na Cinemática é:

$$A = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\theta)$$

Isolando θ:

$$\theta = \frac{1}{2}.arcsen\left(\frac{A.g}{v_0^2}\right)$$

Substituindo os valores obtidos:

$$\theta = \frac{1}{2}.arcsen\left(\frac{0,24.9,8}{4^2}\right) = 4,24^\circ$$

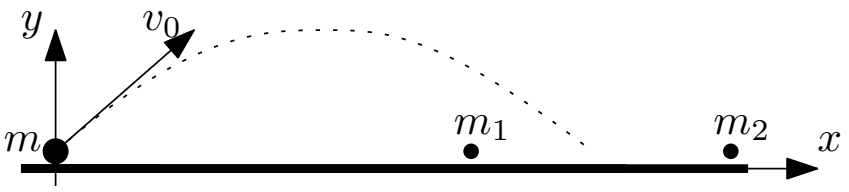
Esse é o ângulo limite para que o gafanhoto pule e ainda caia em cima da folha, ou seja, o ângulo do seu pulo deve ser:

$$0^\circ < \theta < 4,24^\circ$$

Consequentemente, vale também que:

$$85,76^\circ < \theta < 90^\circ$$

8.8 Lançamento de rojão



No ponto de máximo, a velocidade do projétil é nula. Com isso, podemos descobrir a velocidade de lançamento:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2.g.\Delta y \Rightarrow 0^2 = v_{0y}^2 - 2.g.H \Rightarrow v_{0y}^2 = (v_0.sen(\theta))^2 = 2.g.H$$

$$v_0 = \frac{\sqrt{2.g.H}}{sen(\theta)} = \frac{\sqrt{2.9,8.25}}{sen(45°)} = 31,3\ \frac{m}{s}$$

Como o centro de massa se conserva, podemos imaginar que não há explosão e que o rojão continua sua trajetória normalmente, e assim podemos calcular o alcance do projétil. O resultado dessa conta nos dá o valor do alcance do centro de massa:

$$A = \frac{v_0^2}{g}.sen(2.\theta) = \frac{31,3^2}{9,8}.sen(2.45°) = 100\ m$$

a Posição do fragmento mais leve

O centro de massa está em A, então obtemos:

$$x_{cm} = A = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow m_1.x_1 + m_2.x_2 = A.(m_1 + m_2) \Rightarrow x_2 = \frac{A.(m_1 + m_2) - m_1.x_1}{m_2}$$

$$x_2 = \frac{100.(0,1 + 0,05) - 0,1.90}{0,05} = 120\ m$$

b Velocidade dos fragmentos

O tempo levado para sair do máximo até chegar ao chão pode ser descoberto pela equação horária da posição:

$$y = y_0 + v_{0y}^2.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow 0 - H = 0^2.t - \frac{1}{2}.g.t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2.H}{g}} = \sqrt{\frac{2.25}{9,8}} = 2,26\ s$$

Como os fragmentos tem adquirem apenas velocidade horizontal no momento da explosão, suas velocidades são simplesmente:

$$v_i = \frac{\Delta x_i}{t}$$

Assim, obtemos:

$$v_1 = \frac{\Delta x_1}{t} = \frac{90 - 50}{2,26} = 17,7 \ \frac{m}{s}$$

$$v_2 = \frac{\Delta x_1}{t} = \frac{120 - 50}{2,26} = 31,0 \ \frac{m}{s}$$

Mas oque queremos não são suas velocidades, mas sim a velocidade "dada"pela explosão a eles. Antes da explosão, o rojão todo se movia com $v_0.cos(\theta)$ no ponto de máximo, então podemos calcular a diferença entre as velocidade e obter a velocidade que a explosão deu a cada fragmento:

$$\Delta v_1 = v_1 - v_0.cos(\theta) = 17,7 - 31,3.cos(45^\circ) = -4,43 \ \frac{m}{s}$$

$$\Delta v_2 = v_2 - v_0.cos(\theta) = 31,0 - 31,3.cos(45^\circ) = 8,86 \ \frac{m}{s}$$

c Energia liberada pela explosão

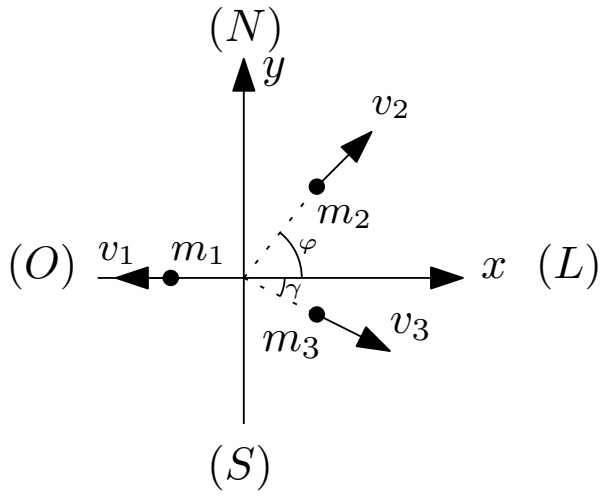
A energia total liberada pela explosão é igual a energia diferença da energia cinética dos fragmentos:

$$E = \Delta K = K_f - K_i = \left[\frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2\right] - \left[\frac{1}{2}.(m_1 + m_2).(v_0.cos(\theta))^2\right]$$

$$E = \left[\frac{1}{2}.0,1.17,7^2 + \frac{1}{2}.0,05.31,0^2\right] - \left[\frac{1}{2}.(0,1 + 0,05).(31,3.cos(45^\circ))^2\right]$$

$$E = 2,95 \ J$$

8.9 Velocidade inicial de fragmentos de mina



Lembre que $m_1 = m_2 = m_3$, e que $\varphi = 60°$ e $\gamma = 30°$.
Por conservação de energia, temos que toda a energia da explosão é convertida em energia cinética para as partículas:

$$E = 4000 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 + \frac{1}{2}.m_3.v_3^2$$

$$m_1.v_1^2 + m_2.v_2^2 + m_3.v_3^2 = 2.4000$$

$$v_1^2+v_2^2+v_3^2 = \frac{8000}{m} = \frac{8000}{0,1} \Rightarrow v_1^2+v_2^2+v_3^2 = 8.10^4$$

O vetor momento linear total também deve se conservar, logo:

$$\vec{0} = \vec{p} \Rightarrow \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} = \vec{0}$$

$$[-m_1.v_1\ \hat{x}] + [m_2.v_2.cos(\varphi)\ \hat{x} + m_2.v_2.sen(\varphi)\ \hat{y}] + [m_3.v_3.cos(\gamma)\ \hat{x} - m_3.v_3.sen(\gamma)\ \hat{y}] = \vec{0}$$

Somando cada componente, as conservações em x e y ficam, respectivamente:

$$-m_1.v_1 + m_2.v_2.cos(\varphi) + m_3.v_3.cos(\gamma) = 0 \Rightarrow -v_1 + v_2.cos(\varphi) + .v_3.cos(\gamma) = 0$$

$$m_2.v_2.sen(\varphi) - m_3.v_3.sen(\gamma) = 0 \Rightarrow v_2.sen(\varphi) - v_3.sen(\gamma) = 0$$

Da conservação em y, obtemos que:

$$v_2.sen(\varphi) - v_3.sen(\gamma) = 0 \Rightarrow v_2 = v_3.\frac{sen(\gamma)}{sen(\varphi)}$$

Podemos isolar v_1 na equação de conservação em x, assim podemos encontrar v_1 em função apenas de v_3:

$$-v_1+v_2.cos(\varphi)+v_3.cos(\gamma) = 0 \Rightarrow v_1 = \left[v_3.\frac{sen(\gamma)}{sen(\varphi)}\right].cos(\varphi)+.v_3.cos(\gamma) = v_3.\frac{sen(\gamma)}{tg(\varphi)}+v_3.cos(\gamma)$$

Agora substituímos v_1 e v_2 na equação de conservação da energia:

$$\left[v_3.\frac{sen(\gamma)}{tg(\varphi)} + v_3.cos(\gamma)\right]^2 + \left[v_3.\frac{sen(\gamma)}{sen(\varphi)}\right]^2 + v_3^2 = 8.10^4$$

$$v_3^2.\left(\left[\frac{sen(\gamma)}{tg(\varphi)}+cos(\gamma)\right]^2+\left[\frac{sen(\gamma)}{sen(\varphi)}\right]^2+1\right)=8.10^4$$

$$v_3=\sqrt{\frac{8}{\left[\frac{sen(\gamma)}{tg(\varphi)}+cos(\gamma)\right]^2+\left[\frac{sen(\gamma)}{sen(\varphi)}\right]^2+1}}.10^2=\sqrt{\frac{8}{\left[\frac{sen(30°)}{tg(60°)}+cos(30°)\right]^2+\left[\frac{sen(30°)}{sen(60°)}\right]^2+1}}.10^2$$

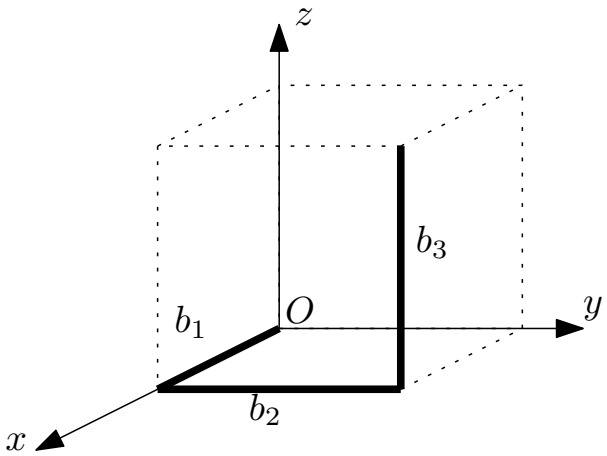
$$v_3=173\ \frac{m}{s}$$

Agora podemos facilmente descobrir v_1 e v_2:

$$v_1=v_3.\frac{sen(\gamma)}{tg(\varphi)}+v_3.cos(\gamma)=173.\frac{sen(30°)}{tg(60°)}+173.cos(30°)=200\ \frac{m}{s}$$

$$v_2=v_3.\frac{sen(\gamma)}{sen(\varphi)}=173.\frac{sen(30°)}{sen(60°)}=100\ \frac{m}{s}$$

8.10 Centro de massa de estrutura cúbica



Como as barras são homogêneas, cada pedaço da barra tem a mesma massa, ou seja, $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{1}{3}.m$. Pelo mesmo motivo, podemos afirmar que o centro de massa de cada pedaço da barra está no seu respectivo centro geométrico.
Assim, podemos analisar o sistema em cada direção e juntar os resultados.

Em x, temos:

$$x_{cm} = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2 + m_3.x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{1}{3}.m.x_1 + \frac{1}{3}.m.x_2 + \frac{1}{3}.m.x_3}{m} = \frac{1}{3}.x_1 + \frac{1}{3}.x_2 + \frac{1}{3}.x_3$$

$$x_{cm} = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.1 + \frac{1}{3}.1 = \frac{5}{6}\ m$$

Em y, temos:

$$y_{cm} = \frac{m_1.y_1 + m_2.y_2 + m_3.y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{1}{3}.m.y_1 + \frac{1}{3}.m.y_2 + \frac{1}{3}.m.y_3}{m} = \frac{1}{3}.y_1 + \frac{1}{3}.y_2 + \frac{1}{3}.y_3$$

$$y_{cm} = \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.1 = \frac{1}{2}\ m$$

Finalmente, em z, obtemos

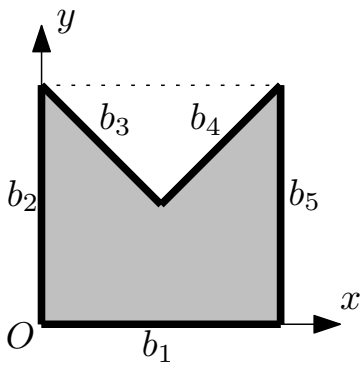
$$z_{cm} = \frac{m_1.z_1 + m_2.z_2 + m_3.z_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{\frac{1}{3}.m.z_1 + \frac{1}{3}.m.z_2 + \frac{1}{3}.m.z_3}{m} = \frac{1}{3}.z_1 + \frac{1}{3}.z_2 + \frac{1}{3}.z_3$$

$$z_{cm} = \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.0 + \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}\ m$$

Assim, podemos concluir que o centro de massa está localizado pelo vetor:

$$\vec{r} = x_{cm}\ \hat{x} + y_{cm}\ \hat{y} + z_{cm}\ \hat{z} = \frac{5}{6}\ \hat{x} + \frac{1}{2}\ \hat{y} + \frac{1}{6}\ \hat{z}$$

8.11 Centro de massa de estrutura quadrada

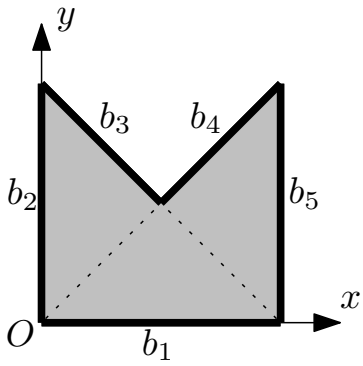


Sabemos que as barras b_1, b_2 e b_5 têm 1 m, com isso podemos descobrir o comprimento das barras b_3 e b_4:

$$l^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow l = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Isso será útil nos itens.

a Considerando 3 triângulos iguais



Se a placa é homogênea, o centro de massa de cada triângulo está no seu respectivo centro geométrico. Perceba que horizontalmente há simetria em torno de $x = \frac{1}{2}\ m$, então podemos afirmar diretamente que $x_{cm} = \frac{1}{2}\ m$. Para a posição vertical do centro de massa, os triângulos com lados b_2 e b_5 têm seus centros geométricos em $y = \frac{1}{2}\ m$, por simetria também.

Para o triângulo de lado b_1 não é algo tão simples assim, teremos que calcular a posição do seu baricentro (centro geométrico do triângulo)[†]:

$$y_{b_1} = \frac{(\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}) + 0 + 0}{3} = \frac{1}{6}\ m$$

Agora podemos calcular a altura do centro de massa total:

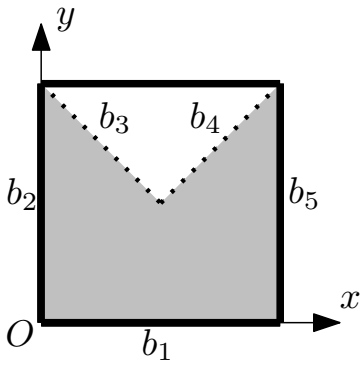
$$y_{cm} = \frac{m.\frac{1}{6} + m.\frac{1}{2} + m.\frac{1}{2}}{3.m} = \frac{\frac{1}{6} + 1}{3} = \frac{7}{18}\ m$$

Então, o vetor que localiza o centro de massa dessa distribuição é:

$$\vec{r}_{cm} = x\ hatx + y\ \hat{y} = \frac{1}{2}\ \hat{x} + \frac{7}{18}\ \hat{y}$$

[†]Caso não lembre (eu também não lembrava!!), a altura do baricentro é calculada como a soma da altura de cada vértice do triângulo dividido por 3

b Resolvendo o mesmo problema, mas com outras técnicas



Se considerarmos apenas o quadrado, o centro de massa será mapeado por:

$$\vec{r}_{cm_q} = \frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{1}{2}\,\hat{y}$$

Para o triângulo, teremos que considerar a altura do baricentro para a altura do centro de massa, mas o centro na horizontal é simplesmente $\frac{1}{2}\,m$, por conta da simetria:

$$\vec{r}_{cm_t} = \frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{1+1+\frac{1}{2}}{3}\,\hat{y} = \frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{\frac{5}{2}}{3}\,\hat{y} \Rightarrow \vec{r}_{cm_t} = \frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{5}{6}\,\hat{y}$$

Agora podemos calcular o centro de massa resultante:

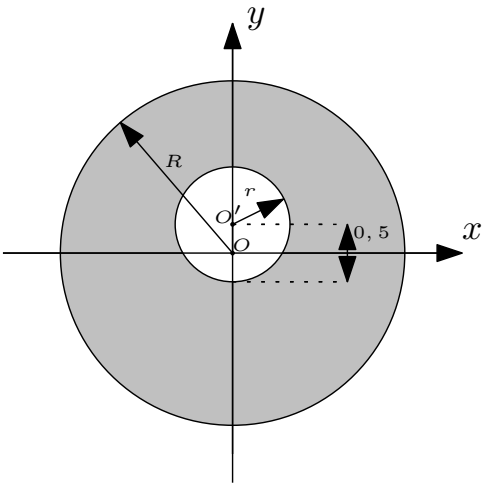
$$x_{cm} = \frac{4.m.x_{cm_q} - m.x_{cm_t}}{(4-1).m} = \frac{4.x_{cm_q} - x_{cm_t}}{3} = \frac{4.\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{2}\,m$$

$$y_{cm} = \frac{4.m.y_{cm_q} - m.y_{cm_t}}{(4-1).m} = \frac{4.y_{cm_q} - y_{cm_t}}{3} = \frac{4.\frac{1}{2} - \frac{5}{6}}{3} = \frac{7}{18}\,m$$

Assim, o vetor que localiza o centro de massa agora obtido é realmente o mesmo que no item anterior:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\,\hat{x} + y\,\hat{y} = \frac{1}{2}\,\hat{x} + \frac{7}{18}\,\hat{y}$$

8.12 Centro de massa de uma placa circular homogênea



Vamos chamar o círculo grande de 1 e o pequeno (que foi removido) de 2. Podemos novamente separar o cálculo do centro de massa em cada eixo.
Em x, temos:

$$x_{cm} = \frac{m_1.x_1 - m_2.x_2}{m_1 - m_2} = \frac{m_1.0 - m_2.0}{m_1 - m_2} = 0$$

Para y, teremos algo um pouco diferente:

$$y_{cm} = \frac{m_1.y_1 - m_2.y_2}{m_1 - m_2} = \frac{m_1.0 - m_2.y_2}{m_1 - m_2} = -\frac{y_2}{\frac{m_1}{m_2} - 1}$$

Perceba que y_2 foi dado, pois o enunciado diz que a distância dos centros é de $0,25\ m$.

Como o círculo é homogêneo, suas densidade devem ser iguais. Através disso podemos encontrar a razão entre as massas:

$$\sigma_1 = \sigma_2 \Rightarrow \frac{m_1}{\pi.R^2} = \frac{m_2}{\pi.r^2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{R^2}{r^2}$$

Então concluímos que:

$$y_{cm} = -\frac{y_2}{\frac{m_1}{m_2} - 1} = -\frac{y_2}{\frac{R^2}{r^2} - 1} = -\frac{0,25}{\frac{1^2}{0,5^2} - 1} = -\frac{1}{12}\ m$$

Então o vetor que localiza o centro de massa é:

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm}\ \hat{x} + y_{cm}\ \hat{y} = 0\ \hat{x} - \frac{1}{12}\ \hat{y}$$

8.13 Lançamento do foguete Saturno V

a Velocidade de escape do combustível

Sabemos que a força de Empuxo está diretamente relacionada com a variação temporal da massa e a velocidade de escape do combustível

$$F_E = -v_e.\frac{d}{dt}m = -v_e.\frac{\Delta m}{\Delta t} = v_e.\frac{|\Delta m|}{\Delta t} \Rightarrow v_e = F_E.\frac{\Delta t}{|\Delta m|}$$

$$v_e = 3,4.10^7.\frac{2,5.60}{2100.10^3} = 2429\ \frac{m}{s} = 2,43\ \frac{Km}{s}$$

b Aceleração do foguete

No decorrer do capítulo, vimos que a velocidade pode ser escrita como:

$$v = -g.t + v_e.ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Derivando em relação ao tempo, obtemos:

$$\frac{d}{dt}v = a = \frac{d}{dt}\left[-g.t + v_e.ln\left(\frac{m_0}{m}\right)\right] = -g + v_e.\frac{m}{m_0}.\frac{-m_0\frac{d}{dt}m}{m^2} = -g - \frac{v_e}{m}.\frac{d}{dt}m$$

Considerando uma variação constante de massa, ou seja, que $\frac{d}{dt}m = -\lambda$, obtemos que $m = m_0 - \lambda.t$. Assim, a equação da aceleração fica:

$$a = -g - \frac{v_e}{m_0 - \lambda.t}.(-\lambda) = -g + \frac{v_e}{m_0 - \lambda.t}.\lambda$$

Para o tempo inicial, $t = 0$, obtemos:

$$a = -g + \frac{v_e}{m_0 - \lambda.0}.\lambda = -g + \frac{v_e}{m_0}.\lambda$$

Agora sim podemos finalmente calcular a aceleração inicial do foguete:

$$a = -g + \frac{v_e}{m_0}.\frac{|\Delta m|}{\Delta t} = -9,8 + \frac{2429}{2800.10^3}.\frac{2100.10^3}{2,5.60} = 2,3\ \frac{m}{s^2}$$

8.14 3° estágio do lançamento do foguete Saturno V

a Velocidade de escape dos gases

Vamos usar novamente a equação

$$F_E = -v_e.\frac{d}{dt}m$$

Isolando a velocidade de escape, obtemos:

$$v_e = F_E.\frac{\Delta t}{|\Delta m|}$$

Pegando os valores da tabela. obtemos:

$$v_e = 90000.9,8.\frac{475}{115000 - 10000} = 3990\ \frac{m}{s} = 4,0\ \frac{Km}{s}$$

b Variação da velocidade

Sabemos que

$$v = v_0 + v_e.ln\left(\frac{m_0}{m}\right)$$

Assim, podemos descobrir o valor da velocidade final no terceiro estágio:

$$v = 24000 + (3990.3,6).ln\left(\frac{115000}{10000}\right) = 59080\ \frac{Km}{h}$$

Assim, a diferença entre as velocidades é:

$$\Delta v = v - v_f = 59080 - 40 = 19080\ \frac{Km}{h}$$

8.15 Voo de um avião a jato

a Força de Empuxo do jato

A força de empuxo é dada por:

$$F_E = -v_e.\frac{\Delta m}{\Delta t} = v_e.\frac{|\Delta m|}{\Delta t}$$

Como temos a densidade e o volume de ar, podemos usar a definição de densidade para calcular a variação de massa:

$$|\Delta m| = \rho.|\Delta V|$$

Assim, obtemos:

$$F_E = v_e.\frac{\rho.|\Delta V|}{\Delta t} = v_e.\frac{\rho.|\Delta V|}{\Delta t}$$

A velocidade de escape não é a velocidade que o fluido sai com relação ao avião, mas sim com relação ao chão. Portanto, a velocidade de escape será dada por uma velocidade relativa[‡]:

$$v = V + v_e \Rightarrow v_e = v - V$$

Agora finalmente podemos calcular a Força de Empuxo:

$$F_E = (v-V).\frac{\rho.|\Delta V|}{\Delta t} = \left(600-\frac{900}{3,6}\right).\frac{1,3.|-150|}{1} = 6,83.10^4\ N = \frac{6,83.10^4}{9,8}\ Kgf = 6,96\ Kgf$$

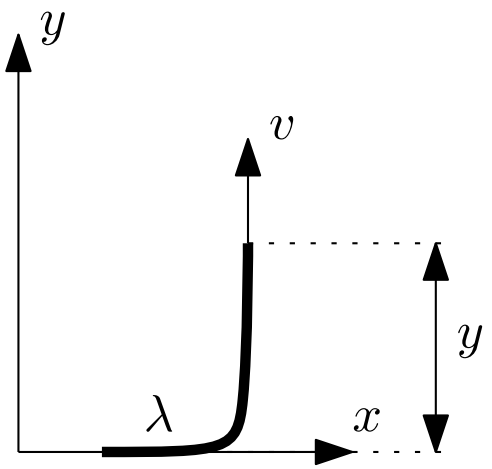
b Potência do jato

Aplicamos diretamente a relação entre potência, força aplicada e velocidade de movimento:

$$P = \vec{F_E}\cdot\vec{V} = F_E.V.cos(0°) = F_E.V = 6,83.10^4.\frac{900}{3,6} = 1,71.10^7\ W = \frac{1,71.10^7}{745,7}\ hp = 22900\ hp$$

[‡]Sendo V a velocidade do avião e v a velocidade do fluido em relação ao avião

8.16 Movimento de uma corda com massa



a Razão entre as forças aplicadas

A princípio, vamos dizer que a massa da corda é m e seu comprimento é L.
Então, sua densidade linear (que é constante) pode ser escrita como:

$$\lambda = \frac{m}{L} = \frac{d}{dy}m'$$

Sendo m' a massa da corda suspensa e de comprimento y arbitrário.

Como a força resultante é a variação do momento linear, temos que a força resultante sobre um pedaço da corda de massa m' é:

$$F_r = \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(m'.v)$$

Como v é constante, obtemos:

$$F_r = v.\frac{d}{dt}m' = v.\frac{d}{dy}m'.\frac{d}{dt}y = v.\lambda.v = v^2.\lambda$$

A força resultante em si, pode ser escrita como uma subtração, pois é a força impressa para puxar a corda para cima menos o peso correspondente à corda que foi puxada, ou seja:

$$F_r = F - m'.g = v^2.\lambda \Rightarrow F = v^2.\lambda + m'.g$$

Agora é fácil calcular a razão, pois inicialmente $m' = 0$ e no final $m' = m$:

$$\frac{F_f}{F_i} = \frac{v^2.\lambda + m.g}{v^2.\lambda} = 1 + \frac{m.g}{v^2.\lambda} = 1 + \frac{m.g}{v^2.\frac{m}{L}} = 1 + \frac{L.g}{v^2} = 1 + \frac{1,5.9,8}{0,5^2} = 59,8$$

b O trabalho realizado

O trabalho no modo integral pode ser escrito como:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

No nosso caso, isso se reduz a simplesmente

$$W = \int F\ dy = \int (v^2.\lambda + m'.g)\ dy$$

Precisamos expressar m' em função de y. Fazemos isso com a densidade linear:

$$\frac{m'}{y} = \frac{m}{L} \Rightarrow m' = \frac{m}{L}.y$$

Assim, o trabalho é obtido integrando:

$$W = \int_0^L (v^2.\lambda + \frac{m}{L}.y.g)\ dy = \int_0^L v^2.\lambda\ dy + \int_0^L \frac{m}{L}.y.g\ dy$$

$$W = v^2.\lambda.\int_0^L dy + \frac{m}{L}.g.\int_0^L y\ dy = v^2.\lambda.L + \frac{m}{L}.g.\frac{L^2}{2} = v^2.\lambda.L + m.g.\frac{L}{2}$$

$$W = v^2.\frac{m}{L}.L + m.g.\frac{L}{2} = v^2.m + m.g.\frac{L}{2} = 0,5^2.0,75 + 0,75.9,8.\frac{1,5}{2} = 5,7\ J$$

8.17 Encantador de cobras

O trabalho para elevar uma quantidade dm de massa da cobra até uma altura y é:

$$dW = dm.g.y$$

Como a massa da cobra é distribuída uniformemente, temos que:

$$\lambda = \frac{m}{l} = \frac{d}{dy}m \Rightarrow dm = \frac{m}{l}.dy$$

Substituindo na equação do trabalho:

$$dW = \frac{m}{l}.g.y.dy$$

Para subir até uma altura h, o trabalho total é:

$$W = \int_0^h \frac{m}{l}.g.y\ dy = \frac{m}{l}.g.\int_0^h y\ dy = \frac{m}{l}.g.\frac{h^2}{2}$$

8.18 Formação de uma gota

Segundo o enunciado, temos que:

$$\frac{1}{A}.\frac{d}{dt}m = \lambda > 0$$

a Crescimento do raio da gota

Podemos escrever a massa dm de uma gota como $\rho.dV$, sendo ρ a densidade volumétrica da mesma. Substituindo isso na relação dada no enunciado:

$$\frac{1}{A}.\frac{\rho.dV}{dt} = \lambda \Rightarrow \rho.\frac{dV}{A} = \lambda.dt \Rightarrow \rho.\frac{4.\pi.r^2.dr}{4.\pi.r^2} = \lambda.dt \Rightarrow \int_0^R \rho\ dr = \int_0^t \lambda\ dt'$$

$$R(t) = \frac{\lambda}{\rho}.t$$

b Aceleração da gota

A força resultante sobre a gota é a peso. Aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$F_r = -m.g = \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(m.v) = v.\frac{d}{dt}m + m.a$$

Substituindo a razão $\frac{d}{dt}m$:

$$-m.g = v.\lambda.A + m.a \Rightarrow -g = \frac{\lambda.A}{m}.v + a \Rightarrow a = -g - \frac{\lambda.A}{m}.v$$

Vamos usar a relação obtida no item passado, assim conseguiremos simplificar algumas coisas:

$$R = \frac{\lambda}{\rho}.t = \frac{\lambda}{\frac{m}{V}}.t = \frac{\lambda}{m}.V.t$$

Perceba que $V = \frac{4}{3}.\pi.R^3 = \frac{R}{3}.4.\pi.R^2 = \frac{R}{3}.A$. Logo:

$$R = \frac{\lambda}{m}.\frac{R}{3}.A.t \Rightarrow \frac{\lambda.A}{m} = \frac{3}{t}$$

Substituindo finalmente na equação da aceleração:

$$a = \frac{d}{dt}v = -g - \frac{3}{t}.v$$

c determinando a constante

Se $v = A.t$, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(A.t) = -g - \frac{3}{t}.(A.t) \Rightarrow A = -g - 3.A \Rightarrow A = -\frac{g}{4}$$

Como $\frac{d}{dt}v = A = a = -\frac{g}{4}$, teremos um movimento uniformemente acelerado.

8.19 Caminhão lançando água

A força resultante sobre o caminhão é a força imposta pela vazão da água menos o atrito com a superfície da estrada. Logo, aplicando a Segunda Lei de Newton, obtemos:

$$F = \frac{d}{dt}p = \frac{d}{dt}(m.v) \Rightarrow F_v - f_{at} = v.\frac{d}{dt}m + m.\frac{d}{dt}v$$

Como vimos, a força de vazão é $\frac{d}{dt}m.(v - v_e)$ e a força de atrito é, como já vimos exaustivamente, $\mu_c.m.g$. Substituindo:

$$\frac{d}{dt}m.(v - v_e) - \mu_c.m.g = v.\frac{d}{dt}m + m.\frac{d}{dt}v \Rightarrow -v_e.\frac{d}{dt}m - \mu_c.m.g = m.\frac{d}{dt}v$$

$$dv = -v_e.\frac{dm}{m} - \mu_c.g.dt$$

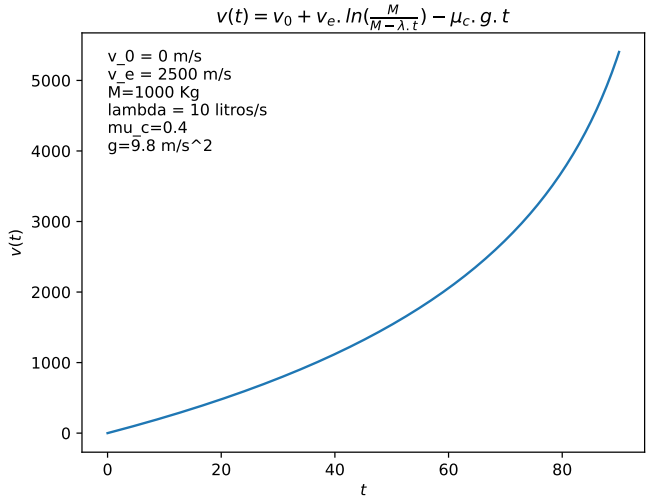
Integrando:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \int_{M}^{m} -v_e\,\frac{dm'}{m'} - \int_{0}^{t} \mu_c.g.dt' \Rightarrow \int_{v_0}^{v} dv' = -v_e.\int_{M}^{m}\frac{dm'}{m'} - \mu_c.g.\int_{0}^{t} dt'$$

$$v - v_0 = -v_e.ln\left(\frac{m}{M}\right) - \mu_c.g.t$$

Temos que expressar m em função de parâmetros conhecidos. Sabemos a vazão, densidade e massa inicial, então é simples reescrever m:

$$m = M - \rho.\lambda.t = M - 1.\lambda.t = M - \lambda.t$$



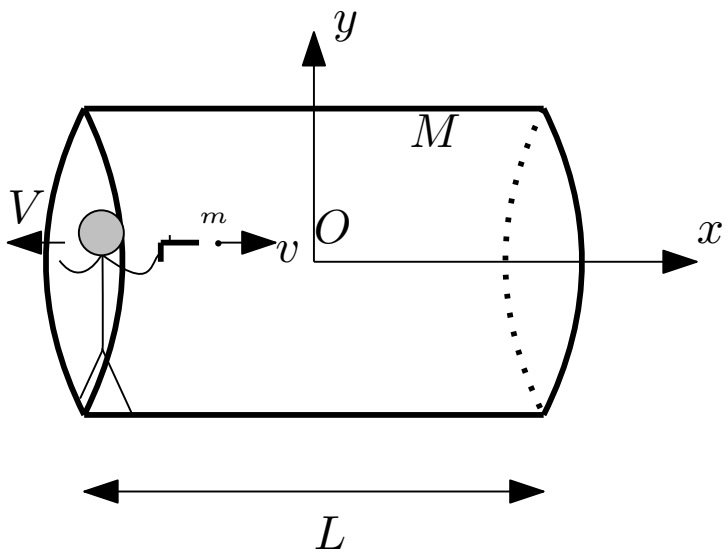
Substituindo:

$$v - v_0 = -v_e.ln\left(\frac{M - \lambda.t}{M}\right) - \mu_c.g.t$$

$$v - v_0 = v_e.ln\left(\frac{M}{M - \lambda.t}\right) - \mu_c.g.t$$

$$v = v_0 + v_e.ln\left(\frac{M}{M - \lambda.t}\right) - \mu_c.g.t$$

8.20 Nave espacial cilíndrica



a Velocidade de recuo da nave espacial

Considerando que inicialmente não há movimento algum, ao disparar o projétil o momento linear total deve ser conversado, tendo em vista a ausência de forças externas:

$$0 = M.V + m.v \Rightarrow V = -\frac{m}{M}.v$$

b Deslocamento da nave até o projétil atingir a parede

Como a nave e o projétil se movem em sentidos opostos, podemos considerar a velocidade do projétil como $v + |V|$ e a nave estando parada. Com isso, o tempo que o projétil leva para percorrer L é:

$$\Delta x = v'.t \Rightarrow t = \frac{\Delta x}{v'} = \frac{L}{v + |V|} = \frac{L}{v + \frac{m}{M}.v}$$

Assim, omo a nave se move com velocidade V, nesse período de tempo, seu deslocamento é:

$$\Delta X = V.t = -\frac{m}{M}.v.\frac{L}{v + \frac{m}{M}.v} = -\frac{L}{\frac{M}{m} + 1} = -\frac{L.m}{M + m} \approx -\frac{L.m}{M} = -\frac{L.m.v}{M.v} = -\frac{L.p}{M.v}$$

c Movimento do centro de massa

Como o centro de massa da nave está sempre na origem do eixo de coordenadas, a massa da nave não entrará no numerador no cálculo do centro de massa:

Inicialmente, temos:

$$x_{cm_0} = \frac{m.x}{m + M} = -\frac{m.\frac{L}{2}}{m + M} = -\frac{m.L}{2.M}$$

No final, obtemos:

$$x_{cm_1} = \frac{m.x}{m+M} = \frac{m.\frac{L}{2}}{m+M} = \frac{m.L}{2.M}$$

Fazendo a diferença, chegamos no resultado:

$$\Delta x_{cm} = x_{cm_1} - x_{cm_0} = \frac{m.L}{2.M} + \frac{m.L}{2.M} = \frac{m.L}{M}$$

d Soma das posições inicial e final do centro de massa

Simplesmente somaremos ΔX e Δx_{cm}:

$$\Delta x_{cm} + \Delta X = \frac{m.L}{2.M} - \frac{m.L}{2.M} = 0\ m$$

Se a soma das forças externas é nula, o centro de massa do **sistema** não pode se mover!

e Pulso de laser

Vamos simplesmente substituir p por $\frac{E}{c}$[§]:

$$\Delta X = -\frac{L.\frac{E}{c}}{M.v} = -\frac{L.\frac{E}{c}}{M.c} = -\frac{L.E}{M.c^2}$$

f Refazendo o item *d*

Simplesmente somaremos ΔX e Δx_{cm} novamente, mas agora com a nova expressão para ΔX:

$$\Delta x_{cm} + \Delta X = 0 \Rightarrow \frac{m.L}{2.M} - \frac{L.E}{M.c^2} = 0 \Rightarrow E = m.c^2$$

Ou seja, agora para que o centro de massa do sistema se conserve, a energia do laser deve ser proporcional a massa da bala que consideramos inicialmente. É como se houvesse uma relação direta entre massa e energia[¶].

[§]Lembre que a luz se desloca com c, ou seja, $v = c$

[¶]Antes que você pense que essa energia é a energia cinética do fóton, saiba que nem massa ele tem!

CAPÍTULO

9

COLISÕES

"O conhecimento é como uma esfera: quanto maior seu volume, maior sua superfície de contato com o desconhecido. Quanto mais aprendemos, mais percebemos o quanto ainda não sabemos."

Nicolau de Cusa

9.1 Força de impulso em cada caso

No geral, o impulso pode ser medido como a força média aplicada em um certo intervalo de tempo, mas também como a variação de momento linear. Então, obtemos:

$$J = F_m.\Delta t = \Delta p = p_f - p_i \Rightarrow F_m = \frac{p_f - p_i}{\Delta t} = \frac{m.v_f - m.v_i}{\Delta t} = \frac{m}{\Delta t}.(v_f - v_i)$$

Agora só precisamos aplicar esta equação em cada contexto! Lembre-se que queremos o valor em Kgf e não em N, por isso devemos dividir o resultado pela aceleração da gravidade:

$$F_m = \frac{m}{g.\Delta t}.(v_f - v_i)$$

a Saque de jogo de tênis

Aplicando os valores:

$$F_m = \frac{60.10^{-3}}{9,8.0,005}.(40 - 0) = \frac{60}{9,8.5}.40 = 49\ Kgf$$

b Cobrança de pênalti

Fazendo o mesmo processo:

$$F_m = \frac{450.10^{-3}}{9,8.0,01}.(20 - 0) = \frac{450}{9,8.10}.20 = 92\ Kgf$$

c Pulando de um muro

Aplicando conservação de energia, podemos obter a velocidade de chegada da pessoa no chão:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h}$$

Assim, obtemos:

$$F_m = \frac{m}{g.\Delta t}.(\sqrt{2.g.h} - 0) = \frac{80}{9,8.0,01}.\sqrt{2.9,8.2,5} = 5714\ Kgf$$

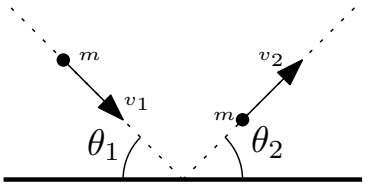
d Colisão entre carro e muro

Substituindo os valores:

$$F_m = \frac{1,5.10^3}{9,8.0,1}.\left(\frac{60}{3,6} - 0\right) = \frac{1,5}{9,8}.\frac{60}{3,6}.10^4 = 2,55.10^4\ Kgf = 25500\ Kgf$$

9.2 Teoria corpuscular da luz

a Reflexão



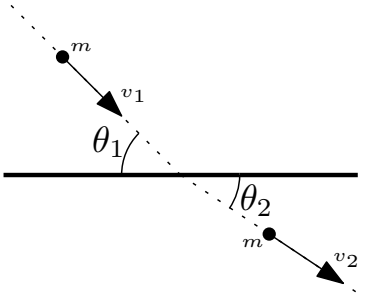
Aplicando a conservação do momento linear no eixo x, obtemos:

$$p_{1x} = p_{2x} \Rightarrow m.v_{1x} = m.v_{2x} \Rightarrow v_1.cos(\theta_1) = v_2.cos(\theta_2)$$

Como se trata de uma colisão elástica, sabemos que $v_1 = v_2$. Logo:

$$cos(\theta_1) = cos(\theta_2) \Rightarrow \theta_1 = \theta_2$$

b Refração



Agora aplicamos conservação do momento linear no eixo y:

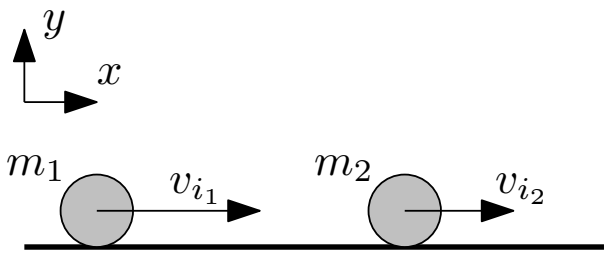
$$p_{1y} = p_{2y} \Rightarrow m.v_{1y} = m.v_{2y} \Rightarrow v_1.sen(\theta_1) = v_2.sen(\theta_2)$$

Como houve mudança de meio, não vale mais que $v_1 = v_2$. Como $\frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)} = n_{12}$, teremos:

$$\frac{sen(\theta_1)}{sen(\theta_2)} = n_{12} = \frac{v_2}{v_1}$$

Como $n_{12} > 1$, pois $sen(\theta_1) > sen(\theta_2)$, teremos que $v_2 > v_1$, ou seja, a velocidade é maior na água.

9.3 Colisão elástica em uma dimensão



a Velocidade do centro de massa se conserva

A velocidade inicial do centro de massa é:

$$\vec{v}_{i_{CM}} = \frac{m_1.\vec{v}_{i_1} + m_2.\vec{v}_{i_2}}{m_1 + m_2} \Rightarrow v_{i_{CM}} = \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{i_2}}{m_1 + m_2}$$

Para uma colisão elástica e unidimensional, a Equação 9.4.11 diz que o módulo das velocidades finais são:

$$v_{f_1} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_1} + \frac{2.m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2}$$

$$v_{f_2} = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_2}$$

Agora vamos calcular a velocidade final do centro de massa, já que temos as velocidades finais*:

$$v_{f_{CM}} = \frac{m_1.v_{f_1} + m_2.v_{f_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{f_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{f_2}$$

$$v_{f_{CM}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.\left[\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_1} + \frac{2.m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2}\right] + \frac{m_2}{m_1 + m_2}.\left[\frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_2}\right]$$

$$v_{f_{CM}} = \left(m_1.\frac{m_1 - m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right).v_{i_1} + m_1.\frac{2.m_2}{(m_1 + m_2)^2}.v_{i_2} + m_2.\frac{2.m_1}{(m_1 + m_2)^2}.v_{i_1} - \left(m_2.\frac{m_1 - m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right).v_{i_2}$$

$$v_{f_{CM}} = \left[m_1.\frac{m_1 - m_2}{(m_1 + m_2)^2} + m_2.\frac{2.m_1}{(m_1 + m_2)^2}\right].v_{i_1} + \left[m_1.\frac{2.m_2}{(m_1 + m_2)^2} - m_2.\frac{m_1 - m_2}{(m_1 + m_2)^2}\right].v_{i_2}$$

*Lembre-se que não há necessidade de se preocupar com o "sinal"das velocidades, a dedução feita durante o capítulo independe disto, sendo esse aspecto determinado unicamente pela relação entre as massas e as velocidades iniciais.

$$v_{f_{CM}} = \left[\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{m_1.m_2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{2.m_1.m_2}{(m_1+m_2)^2}\right].v_{i_1} + \left[\frac{2.m_1.m_2}{(m_1+m_2)^2} - \frac{m_1.m_2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\right].v_{i_2}$$

$$v_{f_{CM}} = \left[\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1.m_2}{(m_1+m_2)^2}\right].v_{i_1} + \left[\frac{m_1.m_2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2}\right].v_{i_2}$$

$$v_{f_{CM}} = \left[\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\right].\frac{m_1.v_{i_1}}{m_1+m_2} + \left[\frac{m_1}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}\right].\frac{m_2.v_{i_2}}{m_1+m_2}$$

$$v_{f_{CM}} = \left[\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}\right].\frac{m_1.v_{i_1}}{m_1+m_2} + \left[\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}\right].\frac{m_2.v_{i_2}}{m_1+m_2}$$

$$v_{f_{CM}} = \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{i_2}}{m_1+m_2}$$

Assim, obtivemos que $v_{i_{CM}} = v_{f_{CM}}$

b Velocidades iniciais em relação ao centro de massa

A velocidade relativa da partícula 2 em relação à partícula 1, como convencionamos nas soluções anteriores, será:

$$v_{r_i} = v_{i_2} - v_{i_1}$$

Vamos começar com a velocidade relativa da partícula 1 em relação ao centro de massa. Obteremos o seguinte:

$$v'_{i_1} = v_{i_1} - v_{i_{CM}} = v_{i_1} - \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{i_2}}{m_1+m_2}$$

Usando a relação da velocidade relativa entre as partículas, podemos substituir v_{i_2}:

$$v'_{i_1} = v_{i_1} - \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.(v_{r_i} + v_{i_1})}{m_1+m_2} = v_{i_1} - \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{r_i} + m_2.v_{i_1}}{m_1+m_2}$$

$$v'_{i_1} = v_{i_1} - \frac{(m_1+m_2).v_{i_1} + m_2.v_{r_i}}{m_1+m_2} = v_{i_1} - \left[\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}.v_{i_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}.v_{r_i}\right] = -\frac{m_2}{m_1+m_2}.v_{r_i}$$

$$v'_{i_1} = -\frac{m_2}{M}.v_{r_i}$$

O análogo podemos fazer para descobrir a velocidade relativa da partícula 2 com relação ao centro de massa:

$$v'_{i_2} = v_{i_2} - v_{i_{CM}} = v_{i_2} - \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{i_2}}{m_1+m_2}$$

Usaremos novamente a relação da velocidade relativa entre as partículas, mas agora substituiremos a velocidade v_{i_1}:

$$v'_{i_2} = v_{i_2} - \frac{m_1.(v_{i_2} - v_{r_i}) + m_2.v_{i_2}}{m_1 + m_2} = v_{i_2} - \frac{m_1.v_{i_2} - m_1.v_{r_i} + m_2.v_{i_2}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{i_2} = v_{i_2} - \frac{(m_1 + m_2).v_{i_2} - m_1.v_{r_i}}{m_1 + m_2} = v_{i_2} - \left[\frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{r_i}\right] = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{r_i}$$

$$v'_{i_2} = \frac{m_1}{M}.v_{r_i}$$

Agora podemos calcular a velocidade relativa entre as partículas 2 e 1 com relação ao centro de massa:

$$v'_{r_i} = v'_{i_2} - v'_{i_1} = \frac{m_1}{M}.v_{r_i} + \frac{m_2}{M}.v_{r_i} = \frac{m_1 + m_2}{M}.v_{r_i} = v_{r_i}$$

Assim, concluímos que a velocidade relativa da partícula 2 com relação à 1 é a mesma, não importando se estamos em um referencial em repouso ou no centro de massa (que se movimento com velocidade constante!).

c Velocidades finais em relação ao centro de massa

Faremos agora o mesmo processo do item passado, mas com as velocidades finais. Como a velocidade do centro de massa se conserva, não precisamos nos preocupar com isso. Para a partícula 1, teremos:

$$v'_{f_1} = v_{f_1} - v_{f_{CM}} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_1} + \frac{2.m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2} - \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{i_2}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{f_1} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_1} + \frac{2.m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2}$$

$$v'_{f_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_1} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.(v_{i_2} - v_{i_1}) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{r_i} = -v'_{i_1}$$

O mesmo se aplica para o movimento da partícula 2, vejamos:

$$v'_{f_2} = v_{f_2} - v_{f_{CM}} = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_2} - \frac{m_1.v_{i_1} + m_2.v_{i_2}}{m_1 + m_2}$$

$$v'_{f_2} = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \frac{m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2}$$

$$v'_{f_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.(v_{i_1} - v_{i_2}) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}.v_{r_i} = -v'_{i_2}$$

Vamos calcular a velocidade relativa final com relação ao centro de massa:

$$v'_{r_f} = v'_{f_2} - v'_{f_1} = -v'_{i_2} + v'_{i_1} = -v'_{r_i}$$

Também podemos comparar a velocidade relativa final entre as partículas no referencial parado e em relação ao centro de massa:

$$v_{r_f} = v_{f_2} - v_{f_1} = \frac{2.m_1}{m_1+m_2}.v_{i_1} - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right).v_{i_2} - \left(\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\right).v_{i_1} - \frac{2.m_2}{m_1+m_2}.v_{i_2}$$

$$v_{r_f} = \frac{2.m_1}{m_1+m_2}.v_{i_1} - \frac{m_1}{m_1+m_2}.v_{i_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}.v_{i_2} - \frac{m_1}{m_1+m_2}.v_{i_1} + \frac{m_2}{m_1+m_2}.v_{i_1} - \frac{2.m_2}{m_1+m_2}.v_{i_2}$$

$$v_{r_f} = \frac{m_1}{m_1+m_2}.v_{i_1} - \frac{m_1}{m_1+m_2}.v_{i_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}.v_{i_1} - \frac{m_2}{m_1+m_2}.v_{i_2}$$

$$v_{r_f} = \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}.v_{i_1} - \frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}.v_{i_2} = v_{i_1} - v_{i_2} = -v_{r_i}$$

Mas vimos anteriormente que $v_{r_i} = v'_{r_i}$, ou seja, assim provamos que:

$$v_{r_f} = v'_{r_f} = -v_{r_i}$$

d Interpretação da colisão vista do centro de massa

Vamos calcular os momentos lineares de cada partícula (com relação ao centro de massa), isso nos dará uma boa visualização do que está acontecendo:

$$p'_{i_1} = m_1.v'_{i_1} = -\frac{m_1.m_2}{M}.v_{r_i}$$

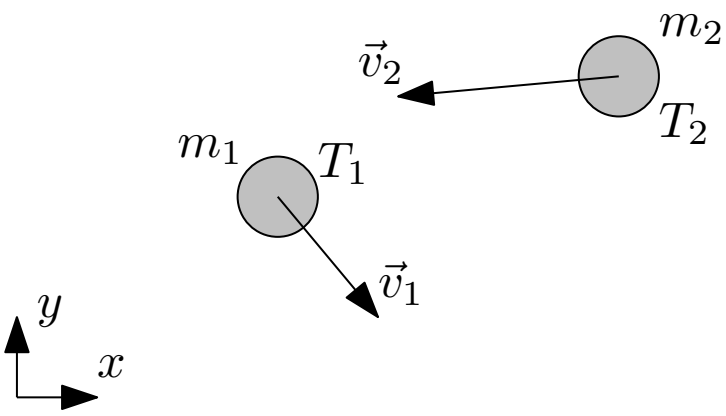
$$p'_{i_2} = m_2.v'_{i_2} = \frac{m_1.m_2}{M}.v_{r_i}$$

$$p'_{f_1} = m_1.v'_{f_1} = -m_1.v'_{i_1} = \frac{m_1.m_2}{M}.v_{r_i}$$

$$p'_{f_2} = m_2.v'_{f_2} = -m_2.v'_{i_2} = -\frac{m_1.m_2}{M}.v_{r_i}$$

Perceba que do "ponto de vista"do centro de massa, inicialmente a partícula 1 e 2 têm momentos linear opostos, mas iguais em módulo e após a colisão, continuam iguais em módulo, mas invertendo os sinais.

9.4 Sistema qualquer de duas partículas



A velocidade relativa da partícula 2 com relação à partícula 1 é dada por:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$

E a velocidade do centro de massa é:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{M}$$

a Momentos em relação ao centro de massa

O momento da partícula 1 com relação ao centro de massa é:

$$\vec{p}_1\,' = m_1.\vec{v}_1\,' = m_1.(\vec{v}_1 - \vec{v}_{CM}) = m_1.\left(\vec{v}_1 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{M}\right)$$

Com a velocidade relativa, podemos substituir $\vec{v}_2$:

$$\vec{p}_1\,' = m_1.\left(\vec{v}_1 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.(\vec{v}_r + \vec{v}_1)}{M}\right) = m_1.\left(\vec{v}_1 - \frac{(m_1 + m_2).\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_r}{M}\right) = -\frac{m_1.m_2}{M}.\vec{v}_r$$

Façamos o mesmo para a partícula 2:

$$\vec{p}_2\,' = m_2.\vec{v}_2\,' = m_2.(\vec{v}_2 - \vec{v}_{CM}) = m_2.\left(\vec{v}_2 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{M}\right)$$

Agora usamos a velocidade relativa para substituir a velocidade $\vec{v}_1$:

$$\vec{p}_2\,' = m_2.\left(\vec{v}_2 - \frac{m_1.(\vec{v}_2 - \vec{v}_r) + m_2.\vec{v}_2}{M}\right) = m_2.\left(\vec{v}_2 - \frac{(m_1 + m_2).\vec{v}_2 - m_1.\vec{v}_r}{M}\right) = \frac{m_1.m_2}{M}.\vec{v}_r$$

Assim, obtivemos que $\vec{p}_1\,' = -\vec{p}_2\,'$. E se definimos $\mu = \frac{m_1.m_2}{M}$, temos que:

$$\vec{p}_2\,' = \mu.\vec{v}_r = -\vec{p}_1\,'$$

b Energia cinética total

Inicialmente, podemos escrever a energia cinética total do sistema como:

$$K = T_1 + T_2 = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

Como $\vec{v}_i\,' = \vec{v}_i - \vec{v}_{CM}$, podemos fazer o produto escalar e descobrir v_i^2 em função dessas variáveis:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM} \Rightarrow v_i^2 = \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i = (\vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM}) \cdot (\vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM}) = v_i'^2 + v_{CM}^2 + 2.\vec{v}_i\,' \cdot \vec{v}_{CM}$$

Substituindo na equação da energia cinética, com $i = 1, 2$, obtemos:

$$K = \frac{1}{2}.m_1.(v_1'^2 + v_{CM}^2 + 2.\vec{v}_1\,' \cdot \vec{v}_{CM}) + \frac{1}{2}.m_2.(v_2'^2 + v_{CM}^2 + 2.\vec{v}_2\,' \cdot \vec{v}_{CM})$$

$$K = \frac{1}{2}.m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}.m_1.v_{CM}^2 + m_1.\vec{v}_1\,' \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2}.m_2.v_2'^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_{CM}^2 + m_2.\vec{v}_2\,' \cdot \vec{v}_{CM})$$

$$K = \frac{1}{2}.m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2'^2 + \frac{1}{2}.(m_1 + m_2).v_{CM}^2 + m_1.\vec{v}_1\,' \cdot \vec{v}_{CM} + m_2.\vec{v}_2\,' \cdot \vec{v}_{CM})$$

$$K = T_1' + T_2' + \frac{1}{2}.M.v_{CM}^2 + (m_1.\vec{v}_1\,' + m_2.\vec{v}_2\,') \cdot \vec{v}_{CM}$$

$$K = T_1' + T_2' + \frac{1}{2}.M.v_{CM}^2 + (\vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,') \cdot \vec{v}_{CM}$$

Vamos lidar apenas com o último termo agora, precisamos provar que o mesmo é nulo. No item anterior já descobrimos quem são os momentos linear relativos ao centro de massa de cada partícula, vamos apenas substituí-los:

$$(\vec{p}_1\,' + \vec{p}_2\,') \cdot \vec{v}_{CM} = (\vec{p}_1\,' - \vec{p}_1\,') \cdot \vec{v}_{CM} = \vec{0} \cdot \vec{v}_{CM} = 0$$

Assim, verificamos que:

$$K = T_1' + T_2' + \frac{1}{2}.M.v_{CM}^2$$

c Energia cinética relativa ao centro de massa

De início, teremos:

$$T_1' + T_2' = \frac{1}{2}m_1.v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2.v_2'^2 = \frac{p_1'^2}{2.m_1} + \frac{p_2'^2}{2.m_2}$$

Como já calculamos os momentos linear, fica simples obter a relação desejada:

$$T_1' + T_2' = \frac{\mu^2.v_r^2}{2.m_1} + \frac{\mu^2.v_r^2}{2.m_2} = \frac{v_r^2}{2}.\mu^2.\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{v_r^2}{2}.\mu^2.\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1.m_2}\right)$$

$$T_1' + T_2' = \frac{v_r^2}{2}.\mu^2.\frac{1}{\mu} = \frac{1}{2}.\mu.v_r^2$$

d Conservação da energia cinética interna

Sabemos que a energia cinética total se conserva, mas, inicialmente, não podemos afirmar que especificamente a energia cinética interna se conserva. Então partimos da primeira afirmativa, e tentamos provar:

$$T_i = T_f \Rightarrow (T_1 + T_2)_i = (T_1 + T_2)_f \Rightarrow (T_1' + T_2')_i + \frac{1}{2}.M.v_{CM_i}^2 = (T_1' + T_2')_f + \frac{1}{2}.M.v_{CM_f}^2$$

Como a velocidade do centro de massa é constante, pois o sistema é isolado, obtemos que:

$$(T_1' + T_2')_i = (T_1' + T_2')_f$$

e Fator Q de uma colisão inelástica

Inicialmente, vale a mesma coisa do item anterior, podemos afirmar que o fator Q é a variação da energia cinética total:

$$Q = T_f - T_i = (T_1 + T_2)_f - (T_1 + T_2)_i$$

Após a colisão, os corpos deslocam-se juntos:

$$Q = \frac{1}{2}.(m_1 + m_2).v_f^2 - \left[\frac{1}{2}.\mu.v_r^2 + \frac{1}{2}.M.v_{CM}^2\right]_i$$

Como as partículas estão grudadas, a velocidade final é exatamente a velocidade do centro de massa final também:

$$Q = \frac{1}{2}.M.v_{CM_f}^2 - \frac{1}{2}.\mu.v_{r_i}^2 - \frac{1}{2}.M.v_{CM_i}^2$$

Como o sistema é isolado, a velocidade do centro de massa não é alterada antes e após a colisão:

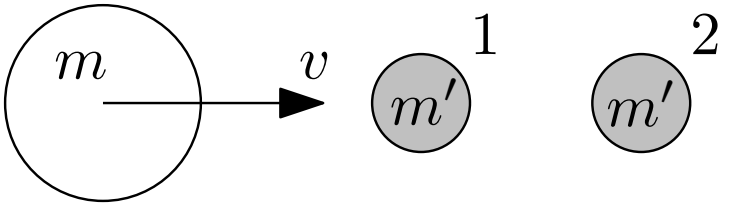
$$Q = -\frac{1}{2}.\mu.v_{r_i}^2$$

Como no final $\vec{v}_{r_f} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{0}$, já que as partículas estão juntas, vale que:

$$Q = \frac{1}{2}.\mu.v_{r_f}^2 - \frac{1}{2}.\mu.v_{r_i}^2 = T_f' - T_i' = \Delta T'$$

Então provamos que o fator Q em uma colisão inelástica é dado pela variação da energia cinética interna do sistema.

9.5 Colisão unidimensional entre 3 partículas



a Condição em que $m \leq m'$

A primeira colisão ocorre entre a partícula de massa m e a partícula 1. Por conservação de momento, temos:

$$m.v = m'.v_1 + m.v_f$$

Vale a conservação da energia cinética também:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m'.v_1^2 + \frac{1}{2}.m.v_f^2 \Rightarrow m.v^2 = m'.v_1^2 + m.v_f^2$$

Vamos isolar a velocidade final da partícula de massa m, v_f, da equação de conservação do momento linear:

$$v_f = \frac{m.v - m'.v_1}{m}$$

Substituindo na equação de conservação da energia cinética:

$$m.v^2 = m'.v_1^2 + m.\left(\frac{m.v - m'.v_1}{m}\right)^2 = m'.v_1^2 + \frac{m^2.v^2 + m'^2.v_1^2 - 2.m.v.m'.v_1}{m}$$

$$m^2.v^2 = m.m'.v_1^2 + m^2.v^2 + m'^2.v_1^2 - 2.m.v.m'.v_1 = (m.m' + m'^2).v_1^2 + m^2.v^2 - 2.m.v.m'.v_1$$

$$(m.m'+m'^2).v_1^2 - 2.m.v.m'.v_1 = 0 \Rightarrow (m.m'+m'^2).v_1 - 2.m.v.m' = 0 \Rightarrow v_1 = \frac{2.m.m'}{m.m' + m'^2}.v$$

$$v_1 = \frac{2.m}{m + m'}.v$$

Com isso, podemos agora descobrir a velocidade final da partícula de massa m:

$$v_f = \frac{m.v - m'.\frac{2.m}{m+m'}.v}{m} = v - \frac{2.m'}{m + m'}.v = \frac{m - m'}{m + m'}.v$$

Como $m \leq m'$, $v_f \leq 0$, ou seja, a partícula de massa m não intervirá na interação entre as partículas 1 e 2. Agora, a partícula 1 irá colidir com a partícula 2, e vale a conservação de momento linear e energia cinética:

$$m'.v_1 = m'.v_2 + m'.v_{1_f}$$

$$\frac{1}{2}.m'.v_1^2 = \frac{1}{2}.m'.v_2^2 + \frac{1}{2}.m'.v_{1_f}^2 \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 + v_{1_f}^2$$

Agora seguimos o mesmo processo feito na primeira colisão, isolamos a velocidade v_{1_f} na equação da conservação do momento linear e substituímos na equação de conservação de energia cinética:

$$v_{1_f} = \frac{m'.v_1 - m'.v_2}{m'} = v_1 - v_2$$

Na equação da energia cinética:

$$v_1^2 = v_2^2 + (v_1 - v_2)^2 = v_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2.v_1.v_2 \Rightarrow 2.v_2^2 - 2.v_1.v_2 = 0 \Rightarrow v_2 = v_1 = \frac{2.m}{m + m'}.v$$

Consequentemente, podemos calcular v_{1_f}:

$$v_{1_f} = v_1 - v_2 = v_1 - v_1 = 0$$

Como era de se esperar, na segunda colisão, as partículas "trocarão"suas velocidades, pois têm a mesma massa m'.

b Condição em que $m > m'$

A primeira colisão ocorre tal qual no primeiro caso, apenas interpretaremos os resultados de outra forma:

$$v_1 = \frac{2.m}{m + m'}.v$$

$$v_f = \frac{m - m'}{m + m'}.v$$

Agora $m > m'$, então v_1 e v_f são positivas e $v_1 > v_f$. Logo, até que a partícula 1 chegue à partícula 2, a partícula de massa m não mudará o sistema. Então os resultados obtidos no item anterior continuam válidos, assim obtemos, para a segunda colisão:

$$v_2 = \frac{2.m}{m + m'}.v$$

$$v_{1_f} = 0$$

Como era esperado, ocorre a "troca"de velocidades, então agora a partícula 1 está em repouso, e a partícula de massa m segue se aproximando, esta será a terceira colisão. Valendo a conservação do momento linear e da energia cinética, obtemos:

$$m.v_f = m'.v'_{1_f} + m.v'_f$$

$$\frac{1}{2}.m.v_f^2 = \frac{1}{2}.m'.v'^2_{1_f} + \frac{1}{2}.m.v'^2_f \Rightarrow m.v_f^2 = m'.v'^2_{1_f} + m.v'^2_f$$

Seguiremos o mesmo processo, isolando v'_f na equação de conservação de momento linear e substituindo na equação de conservação da energia cinética:

$$v'_f = \frac{m.v_f - m'.v'_{1_f}}{m}$$

Na equação da energia cinética:

$$m.v_f^2 = m'.v_{1_f}'^2 + m.\left(\frac{m.v_f - m'.v'_{1_f}}{m}\right)^2 = m'.v_{1_f}'^2 + \frac{m^2.v_f^2 + m'^2.v_{1_f}'^2 - 2.m.v_f.m'.v'_{1_f}}{m}$$

$$m.v_f^2 = m'.v_{1_f}'^2 + m.v_f^2 + \frac{m'^2}{m}.v_{1_f}'^2 - 2.v_f.m'.v'_{1_f} \Rightarrow m'.v_{1_f}'^2 + \frac{m'^2}{m}.v_{1_f}'^2 - 2.v_f.m'.v'_{1_f} = 0$$

$$m'.v'_{1_f} + \frac{m'^2}{m}.v'_{1_f} - 2.v_f.m' = 0 \Rightarrow \left(m' + \frac{m'^2}{m}\right).v'_{1_f} = 2.m'.v_f$$

$$\left(1 + \frac{m'}{m}\right).v'_{1_f} = 2.v_f \Rightarrow v'_{1_f} = \frac{2.m}{m+m'}.v_f = \frac{2.m}{m+m'}.\frac{m-m'}{m+m'}.v = \frac{2.m.(m-m')}{(m+m')^2}.v$$

Com esse resultado em mãos, podemos descobrir a velocidade final da partícula de massa m:

$$v'_f = \frac{m.\frac{m-m'}{m+m'}.v - m'.\frac{2.m.(m-m')}{(m+m')^2}.v}{m} = \frac{m-m'}{m+m'}.v - m'.\frac{2.(m-m')}{(m+m')^2}.v$$

$$v'_f = \frac{m-m'}{m+m'}.\left(\frac{m+m'}{m+m'}\right).v - m'.\frac{2.(m-m')}{(m+m')^2}.v = \frac{m^2-m'^2}{(m+m')^2}.v - \frac{2.(m'.m-m'^2)}{(m+m')^2}.v$$

$$v'_f = \frac{m^2 - m'^2 - 2.m.m' + 2.m'^2}{(m+m')^2}.v = \frac{m^2 + m'^2 - 2.m.m'}{(m+m')^2}.v = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)^2.v$$

Vamos colocar todas as velocidades finais e argumentar o motivo pelo qual não ocorrerão mais que 3 colisões:

$$v'_f = \left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)^2.v$$

$$v'_{1_f} = \frac{2.m.(m-m')}{(m+m')^2}.v$$

$$v_2 = \frac{2.m}{m+m'}.v$$

Analisando as equações e lembrando que $m > m'$, não é difícil concluir que vale a desigualdade[†]:

$$v'_f < v'_{1_f} < v_2$$

Portanto, não ocorrerão mais de 3 colisões.

c Retornando ao item *a*, mas sem a partícula 1

Perceba que quando $m \leq m'$, a velocidade final da massa m não é suficiente para alcançar a partícula 1, sendo ela, na verdade, negativa ou nula. Quando ocorre o encontro da partícula 1 com a 2, ocorre a "permutação"da velocidade, pois elas têm a mesma massa. No final, teremos a partícula de massa m em movimento e a partícula 2 em movimento, sem nenhuma interação, e a partícula 1 em repouso.

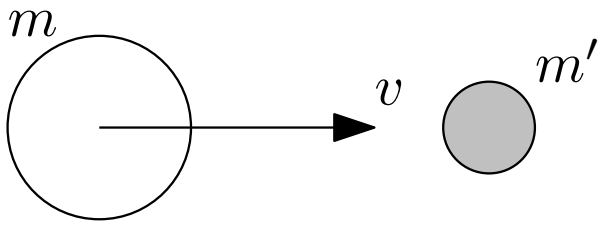
Energeticamente falando, perceba que entre a colisão 1 e 2, não há mudança nenhuma, pois a partícula que antes contribuía com a velocidade deixa de contribuir e a que não contribuía passa a contribuir, com velocidade de mesmo módulo (direção e sentido!).

Logo, a partícula 1 funciona apenas como uma mensageira da interação com a partícula de massa m com a partícula 2, sendo dispensável.

[†]Fica mais claro ao calcular a razão entre as velocidades e analisar se seu valor é maior ou menor que 1.

9.6 Energia transmitida em uma colisão

a Fração f de energia cinética



Vale a conservação de momento linear e de energia cinética, com isso obtemos:

$$m.v = m'.v' + m.v_f$$

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m'.v'^2 + \frac{1}{2}.m.v_f^2 \Rightarrow m.v^2 = m'.v'^2 + m.v_f^2$$

Isolando a velocidade v_f da equação de conservação do momento e substituindo na de energia cinética:

$$v_f = \frac{m.v - m'.v'}{m}$$

Na conservação de energia cinética:

$$m.v^2 = m'.v'^2 + m.\left(\frac{m.v - m'.v'}{m}\right)^2 = m'.v'^2 + \frac{m^2.v^2 + m'^2.v'^2 - 2.m.v.m'.v'}{m}$$

$$m.v^2 = m'.v'^2 + m.v^2 + \frac{m'^2}{m}.v'^2 - 2.v.m'.v' \Rightarrow m'.v'^2 + \frac{m'^2}{m}.v'^2 - 2.v.m'.v' = 0$$

$$m'.v' + \frac{m'^2}{m}.v' - 2.v.m' = 0 \Rightarrow v' = \frac{2.m'}{m' + \frac{m'^2}{m}}.v = \frac{2.m}{m' + m}.v$$

Logo, a velocidade final da partícula de massa m é:

$$v_f = \frac{m.v - m'.\frac{2.m}{m'+m}.v}{m} = v - \frac{2.m'}{m' + m}.v = \left(\frac{m - m'}{m + m'}\right).v$$

Logo, após a colisão, as energias cinéticas total e da partícula de massa m' são, respectivamente:

$$K = \frac{1}{2}.m.v_f^2 + \frac{1}{2}.m'.v'^2 = \frac{1}{2}.m.\left(\frac{m - m'}{m + m'}\right)^2.v^2 + \frac{1}{2}.m'.\left(\frac{2.m}{m' + m}\right)^2.v^2$$

$$K' = \frac{1}{2}.m'.v'^2 = \frac{1}{2}.m'.\left(\frac{2.m}{m' + m}\right)^2.v^2$$

A razão, portanto, é:

$$f = \frac{K'}{K} = \frac{\frac{1}{2}.m'.\left(\frac{2.m}{m'+m}\right)^2.v^2}{\frac{1}{2}.m.\left(\frac{m-m'}{m+m'}\right)^2.v^2 + \frac{1}{2}.m'.\left(\frac{2.m}{m'+m}\right)^2.v^2} = \frac{m'.4.m^2}{m.(m-m')^2 + m'4.m^2}$$

$$f = \frac{4.m.m'}{m^2 + m'^2 - 2.m.m' + 4.m.m'} = \frac{4.m.m'}{m^2 + m'^2 + 2.m.m'}$$

Definindo $\lambda = \dfrac{m'}{m}$, obtemos:

$$f = \frac{4}{\frac{m}{m'} + \frac{m'}{m} + 2'} = \frac{4}{\frac{1}{\lambda} + \lambda + 2} = \frac{4.\lambda}{\lambda^2 + 2.\lambda + 1} = \frac{4.\lambda}{(\lambda+1)^2}$$

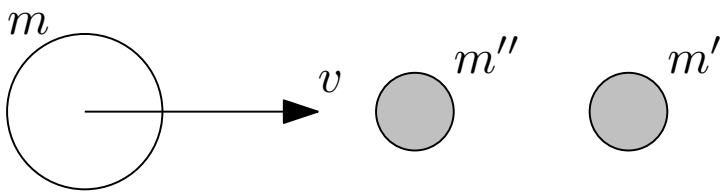
Como a energia cinética se conserva, caso queira, pode usar $K = \frac{1}{2}.m.v^2$ ao invés da energia cinética expressa em função dos parâmetros finais.

A transferência de energia é máxima quando é total, ou seja, $f = 1$. Como consequência, teremos:

$$1 = \frac{4.\lambda}{(\lambda+1)^2} \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 4.\lambda \Rightarrow \lambda^2+2.\lambda+1 = 4.\lambda \Rightarrow \lambda^2-2.\lambda+1 = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

Portanto, para que ocorra a transferência máxima, as massas devem ser iguais.

b Incluindo uma massa m'' no sistema



A primeira colisão ocorre entre m e m''. As velocidades finais já foram calculadas:

$$v_f = \left(\frac{m-m''}{m+m''}\right).v$$

$$v'' = \frac{2.m}{m''+m}.v$$

Agora analisaremos a colisão da partícula de massa m'' com a de massa m', precisaremos apenas calcular a velocidade v', assim já teremos a energia cinética. Valendo a conservação de momento linear e de energia cinética, obtemos:

$$m''.v'' = m'.v' + m''.v''_f$$

$$\frac{1}{2}.m''.v''^2 = \frac{1}{2}.m'.v'^2 + \frac{1}{2}.m''.v''^2_f \Rightarrow m''.v''^2 = m'.v'^2 + m''.v''^2_f$$

Isolando v''_f da primeira equação e substituindo na segunda:

$$m''.v''^2 = m'.v'^2 + m''.\left(\frac{m''.v'' - m'.v'}{m''}\right)^2 = m'.v'^2 + \frac{m''^2.v''^2 + m'^2.v'^2 - 2.m''.v''.m'.v'}{m''}$$

$$m''.v''^2 = m'.v'^2 + m''.v''^2 + \frac{m'^2}{m''}.v'^2 - 2.v''.m'.v' \Rightarrow m'.v'^2 + \frac{m'^2}{m''}.v'^2 - 2.v''.m'.v' = 0$$

$$m'.v' + \frac{m'^2}{m''}.v' - 2.v''.m' = 0 \Rightarrow v' = \frac{2.m''}{m' + m''}.v''$$

Agora substituímos a velocidade v'' obtida anteriormente:

$$v' = \frac{2.m''}{m' + m''}.\frac{2.m}{m'' + m}.v = \frac{4.m.m''}{(m' + m'').(m'' + m)}.v$$

Podemos novamente calcular o fator f, agora usaremos as seguintes energias:

$$K = \frac{1}{2}.m.v^2$$

$$K' = \frac{1}{2}.m'.v'^2 = \frac{1}{2}.m'.\left[\frac{4.m.m''}{(m' + m'').(m'' + m)}\right]^2.v^2$$

O fator f é:

$$f = \frac{K'}{K} = \frac{m'}{m}.\left[\frac{4.m.m''}{(m' + m'').(m'' + m)}\right]^2 = 16.m.m'.\frac{m''^2}{(m' + m'')^2.(m'' + m)^2}$$

Agora, derivamos f com relação à m'' e igualamos a zero, pois queremos saber a condição para que f seja máximo:

$$\frac{d}{dm''}f = 0 \Rightarrow \frac{d}{dm''}\left[\frac{m''^2}{(m' + m'')^2.(m'' + m)^2}\right] = 0$$

$$\frac{2.m''.[(m' + m'')^2.(m'' + m)^2] - m''^2.[2.(m' + m'').(m'' + m)^2 + 2.(m'' + m).(m' + m'')^2]}{(m' + m'')^4.(m'' + m)^4} = 0$$

$$2.m''.[(m' + m'')^2.(m'' + m)^2] - m''^2.[2.(m' + m'').(m'' + m)^2 + 2.(m'' + m).(m' + m'')^2] = 0$$

$$2.m''.[(m' + m'')^2.(m'' + m)^2] = m''^2.[2.(m' + m'').(m'' + m)^2 + 2.(m'' + m).(m' + m'')^2]$$

$$(m' + m'')^2.(m'' + m)^2 = m''.[(m' + m'').(m'' + m)^2 + (m'' + m).(m' + m'')^2]$$

$$m''.\frac{(m'+m'').(m''+m)^2+(m''+m).(m'+m'')^2}{(m'+m'')^2.(m''+m)^2}=1\Rightarrow m''.\left[\frac{1}{m'+m''}+\frac{1}{m''+m}\right]=1$$

$$m''.\left[\frac{2.m''+m'+m}{m'.m''+m'.m+m''^2+m''.m}\right]=1\Rightarrow 2.m''^2+m'.m''+m.m''=m'.m''+m'.m+m''^2+m''.m$$

$$m''^2=m'.m\Rightarrow m''=\sqrt{m'.m}$$

Assim concluímos que para que a transferência de energia para a partícula m' seja máxima, a massa m'' deve assumir um valor específico.

Vamos verificar agora em qual caso a partícula de massa m' obtém mais energia. Podemos fazer isso dividindo os fatores f. Chamemos de f_A o fator calculado no item ***a*** e f_B o calculado agora, no item ***b***:

$$\frac{f_B}{f_A}=\frac{16.m.m'.\frac{m''^2}{(m'+m'')^2.(m''+m)^2}}{\frac{4.m.m'}{m^2+m'^2+2.m.m'}}=\frac{16.m.m'.\frac{m''^2}{(m'+m'')^2.(m''+m)^2}}{\frac{4.m.m'}{(m+m')^2}}=4.m''^2.\frac{(m+m')^2}{(m'+m'')^2.(m''+m)^2}$$

$$\frac{f_B}{f_A}=\left[2.m''.\frac{m+m'}{(m'+m'').(m''+m)}\right]^2$$

$$\frac{f_B}{f_A}=\left[\frac{2.m''.m+2.m''.m'}{m'.m''+m'.m+m''^2+m''.m}\right]^2$$

Queremos mostrar que se $m\neq m'$ teremos $F_B>f_A$. Ou seja, o numerador deve ser maior que o denominador!

$$2.m''.m+2.m''.m'>m'.m''+m'.m+m''^2+m''.m\Rightarrow m''.m+m''.m'>m'.m+m''^2$$

$$m'.m+m''^2-m''.m-m''.m'<0\Rightarrow m''^2-(m'+m).m''+m'.m<0$$

No final das contas, encontramos uma desigualdade do segundo grau. Vamos igualá-la a zero e aplicar Bháskara:

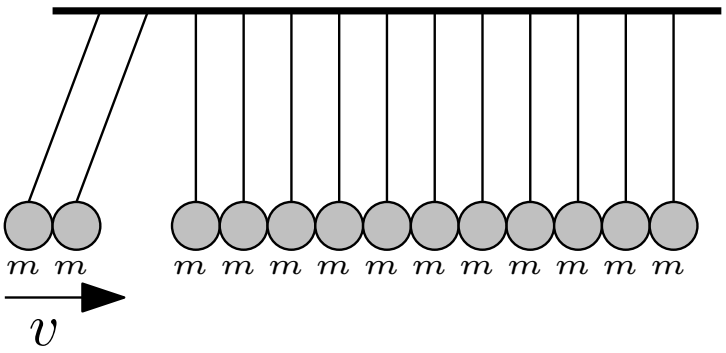
$$m''=\frac{(m+m')\pm\sqrt{(m+m')^2-4.m'.m}}{2}=\frac{(m+m')\pm|m-m'|}{2}$$

As soluções positiva e negativa são, respectivamente, $m''=m$ e $m''=m'$.

A equação do segundo grau que obtemos tem concavidade pra cima ($a=1>0$), ou seja, a desigualdade nos diz que para que $f_B>F_A$, teremos que ter uma massa m'' tal que a desigualdade seja respeitada. Ao aplicarmos Bháskara, encontramos um termo $|m-m'|$ que igualamos a $m-m'$, ou seja, $m>m'$. Portanto, para que a desigualdade seja verdadeira, e consequentemente a energia transferida seja maior, deve vale a desigualdade:

$$m>m''>m'$$

9.7 Pêndulo de Newton



a Transferindo uma velocidade v' a n' bolas

Como vale a conservação de momento linear e energia cinética, obtemos:

$$n.m.v = n'.m.v' \Rightarrow n.v = n'.v'$$

$$\frac{1}{2}.n.m.v^2 = \frac{1}{2}.n'.m.v'^2 \Rightarrow n.v^2 = n'.v'^2$$

Isolando a velocidade v' da equação de conservação de momento linear e substituindo na de energia cinética:

$$n.v^2 = n'.\left(\frac{n}{n'}.v\right)^2 \Rightarrow n = n'$$

Substituindo isso na equação do momento linear, obtemos a relação entre as velocidades:

$$n.v = n.v' \Rightarrow v = v'$$

b Caso em que $n = 2$

Continuam válidas as conservações de momento linear e de energia cinética:

$$m.v + m.v = m.v_1 + m.v_2 \Rightarrow 2.v = v_1 + v_2$$

$$\frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.v_1^2 + \frac{1}{2}.m.v_2^2 \Rightarrow 2.v^2 = v_1^2 + v_2^2$$

Isolamos v_2 na primeira equação e substituímos na segunda:

$$2.v^2 = v_1^2 + (2.v - v_1)^2 = v_1^2 + 4.v^2 + v_1^2 - 4.v.v_1 \Rightarrow v_1^2 + 2.v^2 + v_1^2 - 4.v.v_1 = 0$$

$$2.v_1^2 - 4.v.v_1 + 2.v^2 = 0$$

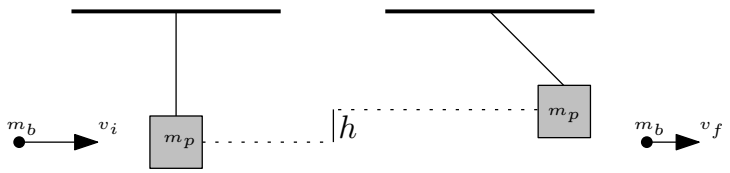
Aplicando Bháskara, já que encontramos uma equação do segundo grau para v_1, obtemos:

$$v_1 = \frac{4.v \pm \sqrt{4^2.v^2 - 4.2.2.v^2}}{2.2} = \frac{4.v \pm \sqrt{16.v^2 - 16.v^2}}{4} = v$$

Substituindo o resultado na equação de conservação de momento linear, obtemos o valor de v_2:

$$2.v = v + v_2 \Rightarrow v_2 = v$$

9.8 Pêndulo balístico



Por conservação do momento linear, obtemos:

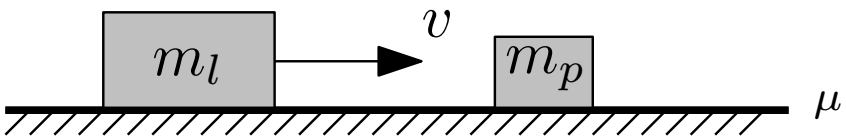
$$m_b.v_i = m_b.v_f + m_p.v \Rightarrow v = \frac{m_b}{m_p}.(v_i - v_f) = \frac{5.10^{-3}}{2}.(400 - 100) = 0,75\ \frac{m}{s}$$

Agora usamos conservação da energia mecânica para descobrirmos o quanto o pêndulo subiu:

$$\frac{1}{2}.m_p.v^2 = m_p.g.h \Rightarrow h = \frac{v^2}{2.g} = \frac{0,75^2}{2.9,8} = 0,029\ m = 2,9\ cm$$

Para calcular mais precisamente a altura de elevação, precisaríamos saber quanto tempo a bala passa dentro do pêndulo, assim saberíamos quanto tempo consideraríamos $m_b + m_p$ se movendo juntos.

9.9 Perícia analisando colisão



Aplicando a equação de Torricelli, podemos descobrir a velocidade inicial do conjunto de carros após a colisão:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta x \Rightarrow v_0 = \sqrt{2.(-a).\Delta x}$$

Com a Segunda Lei de Newton, podemos determinar a aceleração correspondente ao atrito com a estrada[‡]:

$$F_r = M.a \Rightarrow -\mu.n = (m_p + m_l).a \Rightarrow \mu.(m_p + m_l).g = -(m_p + m_l).a \Rightarrow -a = \mu.g$$

Voltando à equação da velocidade, temos:

$$v_0 = \sqrt{2.\mu.g.\Delta x}$$

Agora, aplicando a conservação de momento linear, podemos descobrir a velocidade inicial v do carro luxuoso:

$$m_l.v = (m_p + m_l).v_0 \Rightarrow v = \frac{m_p + m_l}{m_l}.\sqrt{2.\mu.g.\Delta x}$$

Substituindo os valores:

$$v = \frac{1200 + 2400}{2400}.\sqrt{2.0,6.9,8.10,5} = 16,67\ \frac{m}{s} = 60,0\ \frac{Km}{h}$$

[‡]Lembre que aplicando o equilíbrio verticalmente obtemos $n = (m_p + m_l).g$

9.10 A verdadeira quantidade de creme de leite

Inicialmente, podemos calcular a velocidade com que o recipiente chega na balança usando a conservação de energia:

$$m.g.h = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2.g.h}$$

Sabemos pelo Teorema do Impulso-Momento linear, que a variação do momento corresponde à aplicação de um impulso, podemos aplicar isto no momento em que o recipiente chega à balança:

$$\Delta J = F_m.\Delta t = \Delta p = p_f - p_i = -m.(-v) = m.v$$

A força média aplicada F_m é justamente a força normal menos o peso, sendo a normal a força exibida pela balança, ou seja, $n = M.g$, sendo $M = 200\ g$. Assim, obtemos:

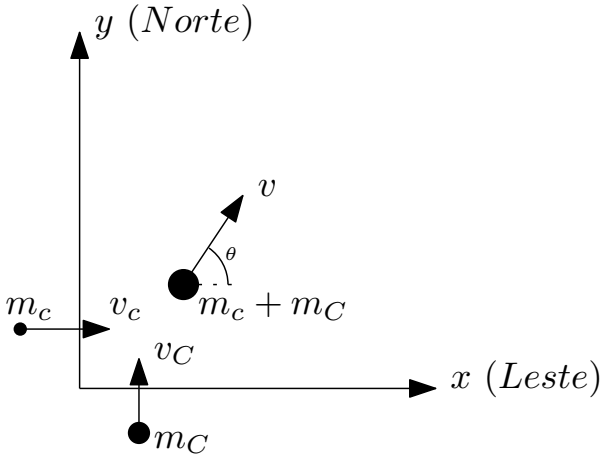
$$(n-P).\Delta t = m.v \Rightarrow (M.g-m.g).\Delta t = m.v \Rightarrow M.g.\Delta t = m.v+m.g.\Delta t \Rightarrow m = M.\frac{g.\Delta t}{v + g.\Delta t}$$

$$m = M.\frac{g.\Delta t}{\sqrt{2.g.h} + g.\Delta t}$$

Substituindo os valores:

$$m = 200.\frac{9,8.2}{\sqrt{2.9,8.0,75} + 9,8.2} = 167\ g$$

9.11 Colisão entre caminhão e carro



a Direção de deslocamento do conjunto após a colisão

Perceba que os vetores velocidade inicial de cada veículo são unidimensionais:

$$\vec{v_c} = v_c\ \hat{x}$$

$$\vec{v_C} = v_C\ \hat{y}$$

Vamos aplicar a conservação do momento linear total:

$$\vec{p_c} + \vec{p_C} = \vec{P} \Rightarrow m_c.v_c\ \hat{x} + m_C.v_C\ \hat{y} = (m_c + m_C).\vec{v}$$

$$m_c.v_c\ \hat{x} + m_C.v_C\ \hat{y} = (m_c + m_C).v_x\ \hat{x} + (m_c + m_C).v_y\ \hat{y}$$

Igualando as componentes que atuam na mesma direção, obtemos que:

$$m_c.v_c = (m_c + m_C).v_x \Rightarrow v_x = \frac{m_c}{m_c + m_C}.v_c = \frac{1}{1+3}.90 = 22,5\ \frac{Km}{h}$$

$$m_C.v_C = (m_c + m_C).v_y \Rightarrow v_y = \frac{m_C}{m_c + m_C}.v_C = \frac{3}{1+3}. = 60 = 45,0\ \frac{Km}{h}$$

Como temos os módulos da velocidade em cada direção podemos calcular o ângulo que o vetor velocidade faz com a horizontal:

$$tg(\theta) = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta = arctg\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = arctg\left(\frac{45}{22,5}\right) = 63,4\ ^\circ$$

b Deslocamento total do conjunto após a colisão

O módulo da velocidade final após a colisão é:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{22,5^2 + 45,0^2} = 50,3 \ \frac{Km}{h} = 14 \ \frac{m}{s}$$

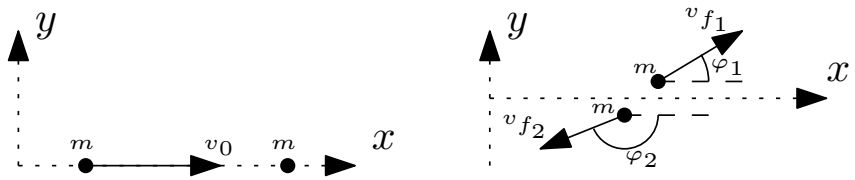
A partir da equação de Torricelli podemos calcular o deslocamento até o conjunto entrar em repouso:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.d \Rightarrow d = \frac{v_0^2}{2.(-a)}$$

Como já calculamos anteriormente, aplicando a Segunda Lei de Newton, verificamos que $a = -\mu.g$:

$$d = \frac{v_0^2}{2.\mu.g} = \frac{14^2}{2.0,5.9,8} = 20 \ m$$

9.12 Colisão entre partículas idênticas vista do centro de massa



Inicialmente, podemos calcular a velocidade do centro de massa:

$$\vec{v}_{i_{CM}} = \frac{m_1.\vec{v}_{i_1} + m_2.\vec{v}_{i_2}}{m_1 + m_2} = \frac{m.\vec{v}_0 + m.\vec{0}}{m + m} = \frac{\vec{v}_0}{2}$$

Portanto, a velocidade de cada partícula em relação ao centro de massa (que indicaremos por $'$) será:

$$\vec{v}_{i_1}{}' = \vec{v}_{i_1} - \vec{v}_{i_{CM}} = \vec{v}_0 - \frac{\vec{v}_0}{2} = \frac{\vec{v}_0}{2}$$

$$\vec{v}_{i_2}{}' = \vec{v}_{i_2} - \vec{v}_{i_{CM}} = \vec{0} - \frac{\vec{v}_0}{2} = -\frac{\vec{v}_0}{2}$$

Analisando o problema ainda do ponto de vista do centro de massa, podemos aplicar a conservação do momento na colisão entre as partículas. Com isso, obtemos:

$$m_1.\vec{v}_{i_1}{}' + m_2.\vec{v}_{i_2}{}' = m_1.\vec{v}_{f_1}{}' + m_2.\vec{v}_{f_2}{}' \Rightarrow m.\vec{v}_{i_1}{}' + m.\vec{v}_{i_2}{}' = m.\vec{v}_{f_1}{}' + m.\vec{v}_{f_2}{}'$$

$$\vec{v}_{i_1}{}' + \vec{v}_{i_2}{}' = \vec{v}_{f_1}{}' + \vec{v}_{f_2}{}' \Rightarrow \frac{\vec{v}_0}{2} - \frac{\vec{v}_0}{2} = \vec{v}_{f_1}{}' + \vec{v}_{f_2}{}' \Rightarrow \vec{v}_{f_1}{}' + \vec{v}_{f_2}{}' = \vec{0}$$

Ou seja, as partículas terão velocidades de mesma magnitude, direção, mas sentidos opostos. Como a energia cinética também se conserva, os módulos dos vetores velocidade no referencial do centro de massa permanecem iguais a $\frac{v_0}{2}$[§].

Agora vamos calcular as velocidades finais de cada partícula. Começaremos pela partícula 1, pois sabemos seu vetor velocidade final em relação ao centro de massa e sabemos que a velocidade do centro de massa se conserva:

$$\vec{v}_{f_1}{}' = \vec{v}_{f_1} - \vec{v}_{f_{CM}} = \vec{v}_{f_1} - \vec{v}_{i_{CM}} \Rightarrow \vec{v}_{f_1} = \vec{v}_{f_1}{}' + \vec{v}_{i_{CM}} = \left(\frac{v_0}{2}.cos(60°)\ \hat{x} + \frac{v_0}{2}.sen(60°)\ \hat{y}\right) + \frac{v_0}{2}\ \hat{x}$$

$$\vec{v}_{f_1} = 3.\frac{v_0}{4}\ \hat{x} + \sqrt{3}.\frac{v_0}{4}\ \hat{y}$$

Como sabemos as componentes da velocidade, podemos determinar o ângulo com a horizontal:

[§]Faça a conta caso duvide!

$$tg(\varphi_1) = \frac{v_{f_{1y}}}{v_{f_{1x}}} \Rightarrow \varphi_1 = arctg\left(\frac{v_{f_{1y}}}{v_{f_{1x}}}\right) = arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 30^\circ$$

E podemos também calcular o módulo da velocidade final da partícula 1:

$$v_{f_1} = \sqrt{v_{f_{1x}}^2 + v_{f_{1y}}^2} = \sqrt{\frac{9}{16}.v_0^2 + \frac{3}{16}.v_0^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.v_0$$

Como temos a relação entre $\vec{v}_{f_1}{}'$ e $\vec{v}_{f_2}{}'$ não é complicado encontrar a velocidade final também da partícula 2:

$$\vec{v}_{f_2}{}' = \vec{v}_{f_2} - \vec{v}_{f_{CM}} \Rightarrow \vec{v}_{f_2} = \vec{v}_{f_2}{}' + \vec{v}_{f_{CM}} = -\vec{v}_{f_1}{}' + \vec{v}_{f_{CM}} = -\left(\frac{v_0}{2}.cos(60^\circ)\,\hat{x} + \frac{v_0}{2}.sen(60^\circ)\,\hat{y}\right) + \frac{v_0}{2}\,\hat{x}$$

$$\vec{v}_{f_2} = \frac{v_0}{4}\,\hat{x} - \sqrt{3}.\frac{v_0}{4}\,\hat{y}$$

Como sabemos as componentes da velocidade, podemos determinar o ângulo com a horizontal:

$$tg(\varphi_2) = \frac{v_{f_{2y}}}{v_{f_{2x}}} \Rightarrow \varphi_2 = arctg\left(\frac{v_{f_{2y}}}{v_{f_{2x}}}\right) = arctg(-\sqrt{3}) = -60^\circ$$

E podemos também, finalmente, calcular o módulo da velocidade final da partícula 2:

$$v_{f_2} = \sqrt{v_{f_{2x}}^2 + v_{f_{2y}}^2} = \sqrt{\frac{1}{16}.v_0^2 + \frac{3}{16}.v_0^2} = \frac{1}{2}.v_0$$

9.13 Colisão entre átomo e molécula de Hidrogênio

Se a massa do átomo é $m_a = m$, a massa da molécula é $m_m = 2.m_a = 2.m$, pois o átomo é H e a molécula é H_2.

a Magnitude da velocidade do átomo após a colisão

Vamos aplicar agora a conservação do momento linear e analisar a colisão:

$$m_a.\vec{v} + m_m.\vec{0} = m_a.\vec{v_a} + m_m.\vec{v_m} \Rightarrow m_a.\vec{v} = m_a.\vec{v_a} + m_m.\vec{v_m}$$

No eixo horizontal, a conservação fica:

$$m_a.v = m_a.v_a.cos(45^\circ) + m_m.v_m.cos(\gamma) \Rightarrow m_a.v = \frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a + m_m.v_m.cos(\gamma)$$

No eixo vertical, teremos consequentemente:

$$0 = m_a.v_a.sen(45^\circ) + m_m.v_m.sen(\gamma) \Rightarrow 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a + m_m.v_m.sen(\gamma)$$

$$m_m.v_m.sen(\gamma) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a \Rightarrow sen(\gamma) = -\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a}{m_m.v_m}$$

Agora precisamos lembrar da relação fundamental da Trigonometria $sen^2(x)+cos^2(x) = 1$. Assim conseguiremos encontrar o valor do $cos(\gamma)$:

$$sen^2(\gamma) = \left(\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2 = \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2 \Rightarrow 1 - cos^2(\gamma) = \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2$$

$$cos(\gamma) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2}$$

Substituindo na equação de conservação de momento linear na horizontal:

$$m_a.v = \frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a + m_m.v_m.\sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2}$$

Pela equação de conservação da energia cinética, obtemos a velocidade v_m:

$$\frac{1}{2}.m_a.v^2 = \frac{1}{2}.m_a.v_a^2 + \frac{1}{2}.m_m.v_m^2 \Rightarrow m_a.v^2 = m_a.v_a^2 + m_m.v_m^2 \Rightarrow v_m = \sqrt{\frac{m_a.v^2 - m_a.v_a^2}{m_m}}$$

Simplificando as massas, a velocidade v_m fica:

$$v_m = \sqrt{\frac{v^2 - v_a^2}{2}}$$

Substituindo:

$$m_a.v = \frac{\sqrt{2}}{2}.m_a.v_a + m_m.\sqrt{\frac{v^2 - v_a^2}{2}}.\sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.\sqrt{\frac{v^2-v_a^2}{2}}}\right)^2}$$

Simplificando as massas:

$$v = \frac{\sqrt{2}}{2}.v_a + 2.\sqrt{\frac{v^2 - v_a^2}{2}}.\sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{v_a}{2.\sqrt{\frac{v^2-v_a^2}{2}}}\right)^2}$$

Agora, manipulando algebricamente, podemos isolar a velocidade do átomo após a colisão:

$$v - \frac{\sqrt{2}}{2}.v_a = 2.\sqrt{\frac{v^2 - v_a^2}{2}}.\sqrt{1 - \frac{1}{8}.\left(\frac{v_a}{\sqrt{\frac{v^2-v_a^2}{2}}}\right)^2}$$

$$\left(v - \frac{\sqrt{2}}{2}.v_a\right)^2 = \left[2.\sqrt{\frac{v^2 - v_a^2}{2}}.\sqrt{1 - \frac{1}{8}.\left(\frac{v_a}{\sqrt{\frac{v^2-v_a^2}{2}}}\right)^2}\right]^2$$

$$\left(v - \frac{\sqrt{2}}{2}.v_a\right)^2 = 2.(v^2 - v_a^2).\left[1 - \frac{1}{8}.\left(\frac{v_a}{\sqrt{\frac{v^2-v_a^2}{2}}}\right)^2\right] = 2.(v^2 - v_a^2) - (v^2 - v_a^2).\frac{v_a^2}{2.(v^2 - v_a^2)}$$

$$v^2 + \frac{v_a^2}{2} - \sqrt{2}.v.v_a = 2.(v^2 - v_a^2) - (v^2 - v_a^2).\frac{v_a^2}{2.(v^2 - v_a^2)} = 2.(v^2 - v_a^2) - \frac{v_a^2}{2}$$

$$\frac{v_a^2}{2} - \sqrt{2}.v.v_a = v^2 - 2.v_a^2 - \frac{v_a^2}{2} \Rightarrow 3.v_a^2 - \sqrt{2}.v.v_a - v^2 = 0$$

Agora, finalmente, podemos aplicar a Fórmula de Bháskara para descobrir o módulo da velocidade do átomo após a colisão:

$$v_a = \frac{\sqrt{2}.v \pm \sqrt{2.v^2 + 12.v^2}}{6} = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{14}}{6}.v$$

Como o módulo deve ser positivo, escolhemos a solução positiva:

$$v_a = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{14}}{6}.v = 0,859.v$$

b Direção de movimento da mólecula e magnitude após a colisão

Se voltarmos, verificaremos que encontramos uma expressão que relaciona v_m e v_a, como já sabemos v_a, podemos usá-la:

$$v_m = \sqrt{\frac{v^2 - v_a^2}{2}} = \sqrt{\frac{v^2 - 0,859^2.v^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,859^2}{2}}.v = 0,362.v$$

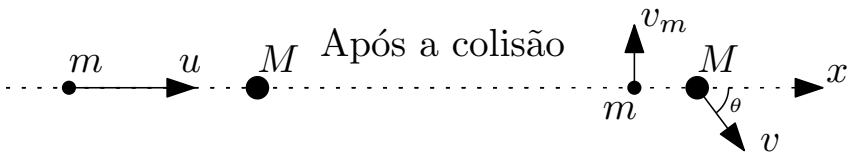
Também isolamos o valor do $cos(\gamma)$, vamos usá-la agora:

$$cos(\gamma) = \sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2} \Rightarrow \gamma = arccos\left[\sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{m_a.v_a}{m_m.v_m}\right)^2}\right]$$

Só precisamos substituir os resultados já obtidos:

$$\gamma = arccos\left[\sqrt{1 - \frac{1}{2}.\left(\frac{0,859}{2.0,362}\right)^2}\right] = 57,1^\circ$$

9.14 Colisão elástica com deflexão de $90°$



a Valor de θ

Vamos aplicar a conservação de momento linear:

$$m.\vec{u} = m.\vec{v}_m + M.\vec{v}$$

Nas direções horizontal e vertical temos, respectivamente:

$$m.u = m.0 + M.v.cos(\theta) = M.v.cos(\theta)$$

$$m.0 = m.v_m + M.v.sen(\theta) \Rightarrow m.v_m + M.v.sen(\theta) = 0$$

Isolando v da primeira e substituindo na segunda:

$$m.v_m + M.\left(\frac{m.u}{M.cos(\theta)}\right).sen(\theta) = 0 \Rightarrow m.v_m + m.u.tg(\theta) = 0 \Rightarrow tg(\theta) = -\frac{v_m}{u}$$

$$\theta = arctg\left(-\frac{v_m}{u}\right) = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -30°$$

b Razão entre as massas e valor de v

Vamos usar a equação da conservação do momento linear na horizontal:

$$m.u = M.v.cos(\theta) \Rightarrow u = \frac{M}{m}.v.cos(\theta) = \lambda.v.cos(\theta)$$

Lembre que vale também a conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2}.m.u^2 = \frac{1}{2}.m.v_m^2 + \frac{1}{2}.M.v^2 \Rightarrow u^2 = v_m^2 + \frac{M}{m}.v^2 = v_m^2 + \lambda.v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{u^2 - v_m^2}{\lambda}}$$

Substituindo na equação de conservação do momento linear:

$$u = \lambda.\sqrt{\frac{u^2 - v_m^2}{\lambda}}.cos(\theta) \Rightarrow u = \sqrt{\lambda.(u^2 - v_m^2)}.cos(\theta) \Rightarrow \lambda = \frac{u^2}{(u^2 - v_m^2).cos^2(\theta)}$$

Substituindo os valores:

$$\lambda = \frac{u^2}{(u^2 - \frac{u^2}{3}).cos^2(-30^\circ)} = \frac{u^2}{2.\frac{u^2}{3}.\frac{3}{4}} \Rightarrow \lambda = 2$$

Para calcular a velocidade da partícula de massa M, usamos a equação que relaciona v e λ:

$$v = \sqrt{\frac{u^2 - v_m^2}{\lambda}} = \sqrt{\frac{u^2 - \frac{u^2}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}.u$$

c Descrição do movimento no referencial do centro de massa

A velocidade do centro de massa não se altera, então vamos calculá-la antes da colisão:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m.\vec{u} + M.\vec{0}}{m + M} = \frac{m}{m + M}.\vec{u} = \frac{1}{1 + \frac{M}{m}}.\vec{u} = \frac{1}{1 + \lambda}.\vec{u} = \frac{1}{3}.\vec{u}$$

As velocidades com relação ao centro de massa serão:

$$\vec{v}_m\,' = \vec{v}_m - \vec{v}_{CM} = \frac{u}{\sqrt{3}}\ \hat{y} - \frac{u}{3}\ \hat{x}$$

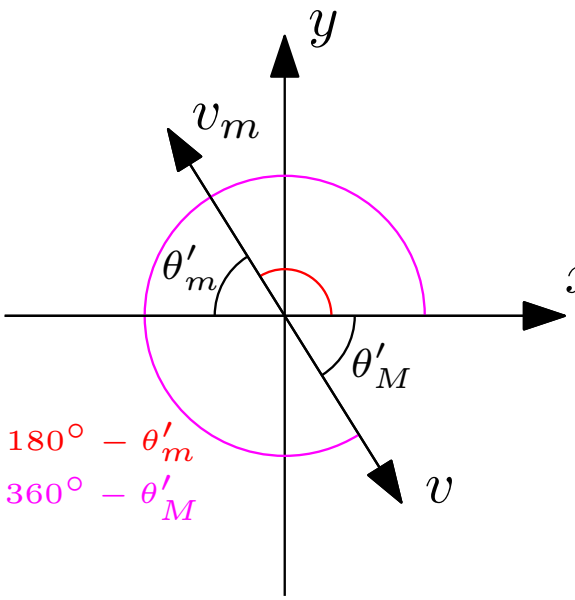
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_{CM} = \sqrt{\frac{1}{3}}.u.\left(cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y}\right) - \frac{u}{3}\ \hat{x} = \frac{u}{6}\ \hat{x} - \frac{u}{2.\sqrt{3}}\ \hat{y}$$

Agora, como temos as componentes das velocidades, podemos calcular o ângulo formado por cada ângulo com a direção de $\vec{u}$ ($\hat{x}$):

$$tg(\theta'_m) = \frac{v'_{m_y}}{v'_{m_x}} \Rightarrow \theta'_m = arctg\left(\frac{v'_{m_y}}{v'_{m_x}}\right) = arctg\left(\frac{\frac{u}{\sqrt{3}}}{-\frac{u}{3}}\right) = -60^\circ$$

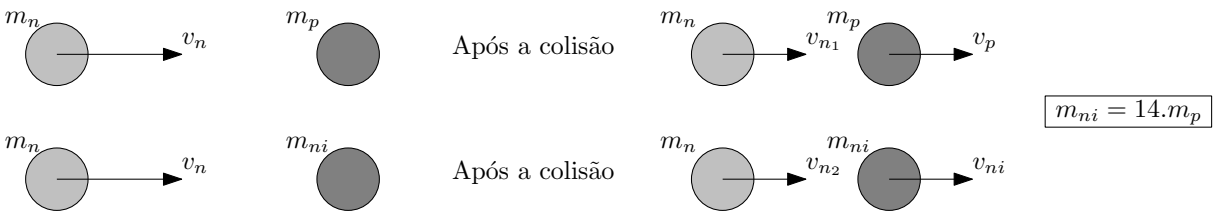
$$tg(\theta'_M) = \frac{v'_y}{v'_x} \Rightarrow \theta'_M = arctg\left(\frac{v'_y}{v'_x}\right) = arctg\left(\frac{-\frac{u}{2.\sqrt{3}}}{\frac{u}{6}}\right) = -60^\circ$$

Os ângulos têm o mesmo valor, mas perceba que estão apontando em direções distintas.



Os ângulos vermelho e rosa são os que constam no gabarito.

9.15 A descoberta do nêutron



a Razão entre a massa do nêutron e do próton

Da colisão entre o nêutron e o próton, obtemos:

Vamos tratar a colisão entre o nêutron e o próton primeiro. Valendo a conservação do momento linear e da energia cinética, obtemos:

$$m_n.v_n = m_p.v_p + m_n.v_{n_1}$$

$$\frac{1}{2}.m_n.v_n^2 = \frac{1}{2}.m_p.v_p^2 + \frac{1}{2}.m_n.v_{n_1}^2 \Rightarrow m_n.v_n^2 = m_p.v_p^2 + m_n.v_{n_1}^2$$

Isolando v_{n_1} da primeira e substituindo na segunda:

$$m_n.v_n^2 = m_p.v_p^2 + m_n.\left(\frac{m_n.v_n - m_p.v_p}{m_n}\right)^2 = m_p.v_p^2 + \frac{m_n^2.v_n^2 + m_p^2.v_p^2 - 2.m_n.v_n.m_p.v_p}{m_n}$$

$$m_n.v_n^2 = m_p.v_p^2 + m_n.v_n^2 + \frac{m_p^2}{m_n}.v_p^2 - 2.v_n.m_p.v_p \Rightarrow 0 = m_p.v_p^2 + \frac{m_p^2}{m_n}.v_p^2 - 2.v_n.m_p.v_p$$

$$2.v_n.v_p = v_p^2 + \frac{m_p}{m_n}.v_p^2 \Rightarrow v_n = \frac{1}{2}.\left(1 + \frac{m_p}{m_n}\right).v_p$$

Quando considerarmos a colisão entre o nêutron e nitrogênio, obteremos a mesma coisa (pois as condições inicial e final são as mesmas), mas agora com ni ao invés de p[¶]:

$$v_n = \frac{1}{2}.\left(1 + \frac{m_{ni}}{m_n}\right).v_{ni} = \frac{1}{2}.\left(1 + \frac{14.m_p}{m_n}\right).v_{ni}$$

Igualando os v_n, obtemos:

$$\frac{1}{2}.\left(1 + \frac{m_p}{m_n}\right).v_p = \frac{1}{2}.\left(1 + \frac{14.m_p}{m_n}\right).v_{ni} \Rightarrow \left(1 + \frac{m_p}{m_n}\right).v_p = \left(1 + \frac{14.m_p}{m_n}\right).v_{ni}$$

Queremos $\frac{m_n}{m_p}$, chamemos essa razão de φ, apenas para simplificar:

[¶]Caso duvide, faça as contas (isso não é preguiça de minha parte, se chama aprendizagem significativa!).

$$\left(1+\frac{1}{\varphi}\right).v_p = \left(1+\frac{14}{\varphi}\right).v_{ni} \Rightarrow (\varphi+1).v_p = (\varphi+14).v_{ni} \Rightarrow \varphi = \frac{14.v_{ni}-v_p}{v_p-v_{ni}}$$

Perceba que temos uma imprecisão em v_{ni}, então vamos trocá-lo por $v_{ni} \pm \frac{10}{100}.v_{ni}$ e substituir os valores.

$$\varphi = \frac{14.\left(v_{ni} \pm \frac{10}{100}.v_{ni}\right) - v_p}{v_p - v_{ni}} = \frac{14.v_{ni}-v_p}{v_p-v_{ni}} \pm \frac{14}{10}.\frac{v_{ni}}{v_p-v_{ni}}$$

$$\varphi = \frac{14.4,7-33}{33-4,7} \pm \frac{14}{10}.\frac{4,7}{33-4,7} \Rightarrow \varphi = 1,2 \pm 0,2$$

b Velocidade inicial dos nêutrons

Como sabemos o valor da razão, podemos calcular a velocidade inicial.

$$v_n = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{m_p}{m_n}\right).v_p = \frac{1}{2}.\left(1+\frac{1}{\varphi}\right).v_p = \frac{1}{2}.\left(\frac{\varphi+1}{\varphi}\right).v_p$$

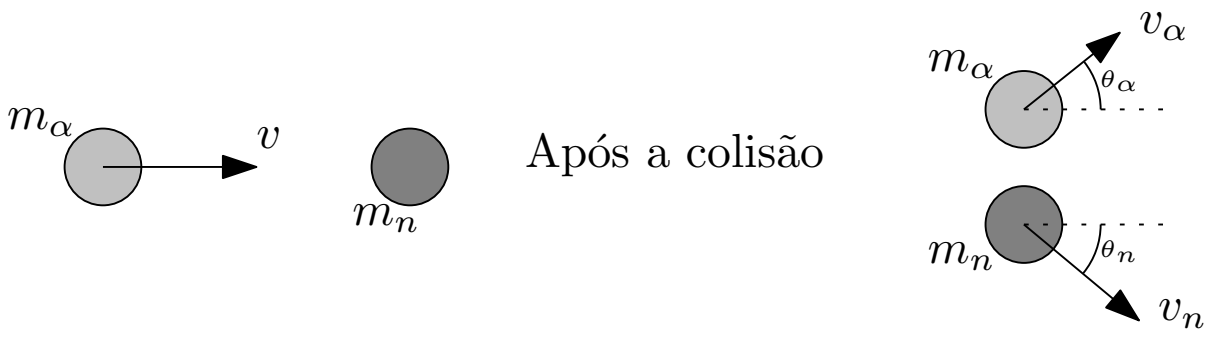
Perceba que há imprecisão também em φ, então trocaremos ele por $\varphi \pm \varphi'$.

$$v_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{\varphi \pm \varphi' + 1}{\varphi}\right).v_p = \frac{1}{2}.\left(\frac{\varphi+1}{\varphi}\right).v_p \pm \frac{1}{2}.\left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right).v_p$$

Substituindo os valores, obtemos:

$$v_n = \frac{1}{2}.\left(\frac{1,2+1}{1,2}\right).3,3.10^7 \pm \frac{1}{2}.\left(\frac{0,2}{1,2}\right).3,3.10^7 = (3,0 \pm 0,3).10^7 \ \frac{m}{s}$$

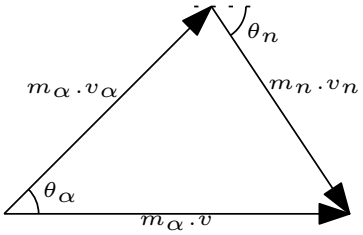
9.16 Ângulo máximo de espalhamento elástico



a Ângulo máximo de deflexão

Aplicando conservação de energia cinética:

$$\frac{1}{2}.m_\alpha.v^2 = \frac{1}{2}.m_\alpha.v_\alpha^2 + \frac{1}{2}.m_n.v_n^2 \Rightarrow m_\alpha.v^2 = m_\alpha.v_\alpha^2 + m_n.v_n^2 \Rightarrow 4.v^2 = 4.v_\alpha^2 + v_n^2$$



Podemos aplicar a Lei dos Cossenos no diagrama da conservação do momento linear.

$$(m_n.v_n)^2 = (m_\alpha.v_\alpha)^2 + (m_\alpha.v)^2 - 2.m_\alpha.v_\alpha.m_\alpha.v.cos(\theta_\alpha)$$

$$(v_n)^2 = (4.v_\alpha)^2 + (4.v)^2 - 2.4.v_\alpha.4.v.cos(\theta_\alpha)$$

$$v_n^2 = 16.v_\alpha^2 + 16.v^2 - 32.v_\alpha.v.cos(\theta_\alpha)$$

Substituindo os v_n^2, teremos:

$$4.v^2 - 4.v_\alpha^2 = 16.v_\alpha^2 + 16.v^2 - 32.v_\alpha.v.cos(\theta_\alpha)$$

$$32.v_\alpha.v.cos(\theta_\alpha) = 20.v_\alpha^2 + 12.v^2 \Rightarrow 5.v_\alpha^2 - 8.v.cos(\theta_\alpha).v_\alpha + 3.v^2 = 0$$

Agora temos uma equação do 2° grau para v_α, que é a velocidade correspondente do ângulo ao qual queremos maximizar. Aplicando a Fórmula de Bháskara, podemos calcular apenas o Δ:

$$\Delta = [8.v.cos(\theta_\alpha)]^2 - 4.5.3.v^2 = 64.v^2.cos^2(\theta_\alpha) - 60.v^2$$

Lembre que o valor de Δ ficará em uma raíz quadrada, logo deve assumir um valor maior que zero:

$$64.v^2.cos^2(\theta_\alpha) - 60.v^2 \geq 0 \Rightarrow 64.v^2.cos^2(\theta_\alpha) \geq 60.v^2 \Rightarrow cos^2(\theta_\alpha) \geq \frac{60}{65} \Rightarrow cos(\theta_\alpha) \geq \sqrt{\frac{60}{65}}$$

Peguemos o limite inferior:

$$cos(\theta_\alpha) = \sqrt{\frac{60}{65}} \Rightarrow \theta_\alpha = arccos\left(\sqrt{\frac{60}{65}}\right) = 14,5^\circ$$

b Fração de energia absorvida pelo nêutron

Resolvendo a equação do segundo grau para v_α, já considerando $\Delta = 0$:

$$v_\alpha = \frac{8.v.cos(\theta_\alpha)}{2.5} = \frac{4}{5}.cos(\theta_\alpha).v$$

Sabemos que $4.v^2 = 4.v_\alpha^2 + v_n^2$, como sabemos o valor de v_α, podemos isolar e descobrir v_n:

$$4.v^2 = 4.v_\alpha^2 + v_n^2 \Rightarrow v_n^2 = 4.v^2 - 4.v_\alpha^2 \Rightarrow v_n = \sqrt{4.v^2 - 4.v_\alpha^2} = 2.\sqrt{v^2 - v_\alpha^2}$$

$$v_n = 2.\sqrt{v^2 - \left(\frac{4}{5}.cos(\theta_\alpha).v\right)^2} = 2.\sqrt{1 - \frac{16}{25}.cos^2(\theta_\alpha)}.v = \frac{2}{5}.\sqrt{25 - 16.cos^2(\theta_\alpha)}.v$$

Agora podemos calcular a razão absorvida pelo nêutron:

$$\gamma = \frac{\frac{1}{2}.m_n.v_n^2}{\frac{1}{2}.m_\alpha.v^2} = \frac{v_n^2}{4.v^2} = \frac{(\frac{2}{5}.\sqrt{25 - 16.cos^2(\theta_\alpha)}.v)^2}{4.v^2} = \frac{1}{25}.(25 - 16.cos^2(\theta_\alpha))$$

$$\gamma = 1 - \frac{16}{25}.cos^2(\theta_\alpha) = 1 - \frac{16}{25}.\frac{60}{65} = 0,4$$

c Ângulo entre a direção de recuo e de incidência

A conservação do momento linear na vertical nos dá:

$$m_\alpha.v_\alpha.sen(\theta_\alpha) = m_n.v_n.sen(\theta_n) \Rightarrow [m_\alpha.v_\alpha.sen(\theta_\alpha)]^2 = [m_n.v_n.sen(\theta_n)]^2$$

$$m_\alpha^2.v_\alpha^2.sen^2(\theta_\alpha) = m_n^2.v_n^2.sen^2(\theta_n) \Rightarrow m_\alpha^2.v_\alpha^2.(1 - cos^2(\theta_\alpha)) = m_n^2.v_n^2.sen^2(\theta_n)$$

$$16.v_\alpha^2.(1 - cos^2(\theta_\alpha)) = v_n^2.sen^2(\theta_n) \Rightarrow sen(\theta_n) = 4.\frac{v_\alpha}{v_n}.\sqrt{1 - cos^2(\theta_\alpha)}$$

Substituindo os valores que já temos das velocidades:

$$sen(\theta_n) = 4.\frac{\frac{4}{5}.cos(\theta_\alpha).v}{\frac{2}{5}.\sqrt{25-16.cos^2(\theta_\alpha)}.v}.\sqrt{1-cos^2(\theta_\alpha)} = 8.\frac{cos(\theta_\alpha)}{\sqrt{25-16.cos^2(\theta_\alpha)}}.\sqrt{1-cos^2(\theta_\alpha)}$$

$$\theta_n = arcsen\left(8.\frac{cos(\theta_\alpha)}{\sqrt{25-16.cos^2(\theta_\alpha)}}.\sqrt{1-cos^2(\theta_\alpha)}\right)$$

Substituindo o valor do cosseno:

$$\theta_n = arcsen\left(8.\frac{\sqrt{\frac{15}{16}}}{\sqrt{25-16.\frac{15}{16}}}.\sqrt{1-\frac{15}{16}}\right) = arcsen\left(2.\frac{\sqrt{\frac{15}{16}}}{\sqrt{10}}\right) = 37,8^\circ$$

O valor no gabarito é negativo, pois a partícula, como vimos inicialmente, vai para baixo.

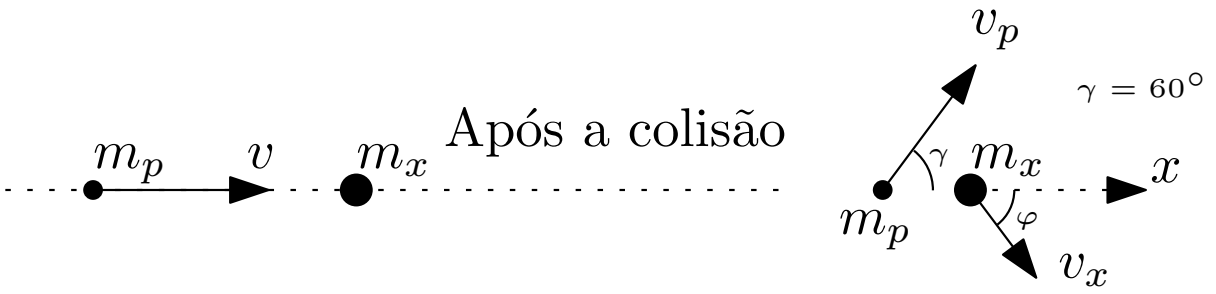
9.17 *Descrição de uma reação $d + d \rightarrow p + t$

a Energia dos p emergentes

b Energia dos t associados aos p emergentes

c Direção dos t emergentes em relação à direção de incidência

9.18 Identificando núcleo através de uma colisão



Primeiramente, aplicamos a conservação do momento linear. Assim, obtemos:

$$m_p.\vec{v} = m_p.\vec{v}_p + m_x.\vec{v}_x$$

Separando as componentes, na direção horizontal e vertical teremos, respectivamente:

$$m_p.v = m_p.v_p.cos(60°) + m_x.v_x.cos(\varphi) \Rightarrow m_p.v = \frac{1}{2}.m_p.v_p + m_x.v_x.cos(\varphi)$$

$$0 = m_p.v_p.sen(60°) + m_x.v_x.sen(\varphi) \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}.m_p.v_p + m_x.v_x.sen(\varphi) = 0$$

Vale também a conservação de energia cinética:

$$\frac{1}{2}.m_p.v^2 = \frac{1}{2}.m_p.v_p^2 + \frac{1}{2}.m_x.v_x^2 \Rightarrow m_p.v^2 = m_p.v_p^2 + m_x.v_x^2$$

Por fim, o enunciado também nos dá uma relação entre os raios de curvatura do próton antes e depois da colisão. Aplicando a Segunda Lei de Newton, sabendo que a força magnética funcionará como resultante centrípeta, obtemos:

$$F_{mag} = m_p.a_{rad} \Rightarrow q.V.B = m_p.\frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{m_p.V}{q.B} = \frac{m_p.V}{e.B}$$

O raio inicial é obtido quando $V = v$ e o raio final quando $V = v_p$. Sabemos o fator pelo qual o raio é reduzido, logo:

$$\frac{R_f}{R_i} = \frac{\frac{m_p.v_p}{e.B}}{\frac{m_p.v}{e.B}} = \frac{v_p}{v} = 0,946 = \tau$$

Vamos, na equação de conservação da energia cinética, substituir v_p em função de v usando a relação dos raios, assim teremos v_x apenas em função de v:

$$m_p.v^2 = m_p.(v.\tau)^2 + m_x.v_x^2 \Rightarrow m_x.v_x^2 = m_p.v^2 - m_p.v^2.\tau^2 \Rightarrow v_x^2 = \frac{m_p.v^2 - m_p.v^2.\tau^2}{m_x}$$

$$v_x = \sqrt{\frac{m_p}{m_x}.(1-\tau^2)}.v$$

Agora substituímos tanto v_x quanto v_p na equação de conservação do momento linear na vertical:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.m_p.[v.\tau] + m_x.\left[\sqrt{\frac{m_p}{m_x}.(1-\tau^2)}.v\right].sen(\varphi) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}.m_p.\tau + \sqrt{m_p.m_x.(1-\tau^2)}.sen(\varphi) = 0$$

$$sen(\varphi) = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}.m_p.\tau}{\sqrt{m_p.m_x.(1-\tau^2)}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}}.\tau$$

Elevando ambos lados ao quadrado, podemos descobrir o $cos(\varphi)$:

$$sen^2(\varphi) = 1 - cos^2(\varphi) = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}}.\tau\right]^2 = \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2$$

$$cos(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2}$$

Agora, finalmente, na conservação de momento linear na horizontal, podemos substituir os valores de v_p, v_x e $cos(\varphi)$, visando isolar apenas m_x:

$$m_p.v = \frac{1}{2}.m_p.[v.\tau] + m_x.\left[\sqrt{\frac{m_p}{m_x}.(1-\tau^2)}.v\right].\left[\sqrt{1 - \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2}\right]$$

$$m_p = \frac{1}{2}.m_p.\tau + \left[\sqrt{m_x.m_p.(1-\tau^2)}\right].\left[\sqrt{1 - \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2}\right]$$

$$m_p - \frac{1}{2}.m_p.\tau = m_p.\left(1 - \frac{\tau}{2}\right) = \left[\sqrt{m_x.m_p.(1-\tau^2)}\right].\left[\sqrt{1 - \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2}\right]$$

$$m_p^2.\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2 = \left[\sqrt{m_x.m_p.(1-\tau^2)}\right]^2.\left[\sqrt{1 - \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2}\right]^2$$

$$m_p^2.\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2 = m_x.m_p.(1-\tau^2).\left(1 - \frac{3}{4}.\frac{m_p}{m_x.(1-\tau^2)}.\tau^2\right)$$

$$m_p.\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2 = m_x.(1-\tau^2) - (1-\tau^2).\frac{3}{4}.\frac{m_p}{1-\tau^2}.\tau^2$$

$$m_x.(1-\tau^2) = m_p.\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2 + (1-\tau^2).\frac{3}{4}.\frac{m_p}{1-\tau^2}.\tau^2$$

$$m_x = \frac{m_p}{1-\tau^2}.\left(1 - \frac{\tau}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.\frac{m_p}{1-\tau^2}.\tau^2 = \frac{m_p}{1-\tau^2}.\left(\frac{2-\tau}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.\frac{m_p}{1-\tau^2}.\tau^2$$

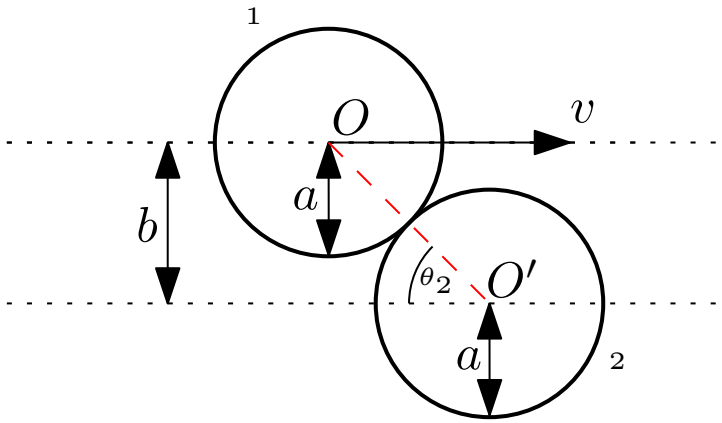
$$m_x = \frac{1}{4}.\frac{m_p}{1-\tau^2}.(2-\tau)^2 + \frac{3}{4}.\frac{m_p}{1-\tau^2}.\tau^2 = \frac{(2-\tau)^2 + 3.\tau^2}{4.(1-\tau^2)}.m_p$$

Assim, substituindo os valores, obtemos:

$$m_x = \frac{(2-0,946)^2 + 3.0,946^2}{4.(1-0,946^2)}.m_p = 9.m_p \approx 9\ u.m.a$$

Com uma rápida pesquisa, verificamos que o núcleo atômico com massa próxima à 9 $u.m.a$ é o Berílio, cujo isótopo estável é o ^9Be.

9.19 Colisão entre corpos com dimensões



a Colisão vista do centro de massa

Sabemos que a velocidade do centro de massa se conserva, então podemos calculá-la logo inicialmente:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m.\vec{v} + m.\vec{0}}{m+m} = \frac{\vec{v}}{2}$$

Agora, vamos aplicar a conservação do momento linear:

$$m.\vec{v} = m.\vec{v}_1 + m.\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

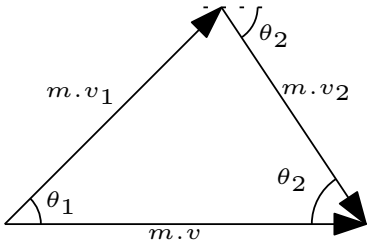
Na horizontal e na vertical teremos, respectivamente:

$$v = v_1.cos(\theta_1) + v_2.cos(\theta_2)$$

$$0 = v_1.sen(\theta_1) + v_2.sen(\theta_2)$$

Vale também a conservação da energia cinética:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.v_1^2 + \frac{1}{2}.m.v_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2$$



Geometricamente, $v^2 = v_1^2 + v_2^2$ significa dizer que o ângulo entre $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ é reto (90°), pois as massas são iguais. Por isso, $\theta_1 + \theta_2 = 90°$.

Pela figura da colisão, podemos determinar o ângulo θ_2:

$$sen(\theta_2) = \frac{b}{2.a}$$

$$cos(\theta_2) = \sqrt{1 - sen^2(\theta_2)} = \sqrt{1 - \left[\frac{b}{2.a}\right]^2} = \frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}$$

Como $\theta_1 + \theta_2 = 90°$, temos:

$$sen(\theta_2) = sen(90° - \theta_1) \Rightarrow cos(\theta_1) = \frac{b}{2.a}$$

$$cos(\theta_2) = cos(90° - \theta_1) \Rightarrow sen(\theta_1) = \frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}$$

Como $\vec{v}_{CM} = \frac{\vec{v}}{2}$, vale, como vimos durante o capítulo, que os ângulos θ_1 e θ_2 vistos do centro de massa são:

$$\theta'_i = 2.\theta_i$$

Para o ângulo θ_2:

$$\theta'_2 = 2.\theta_2 \Rightarrow \frac{\theta'_2}{2} = \theta_2 \Rightarrow sen\left(\frac{\theta'_2}{2}\right) = sen(\theta_2) = \frac{b}{2.a}$$

Para θ_1, consequentemente:

$$\theta_1 + \theta_2 = 90° = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\theta'_1}{2} + \frac{\theta'_2}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta'_1 = \pi - \theta'_2$$

b Vetor velocidade de cada disco após a colisão

Agora teremos que determinar os módulos das velocidades após a colisão. Substituindo a velocidade v_2 na equação de conservação do momento linear na vertical obtida na conservação da energia cinética:

$$0 = v_1.sen(\theta_1) + \sqrt{v^2 - v_1^2}.sen(\theta_2) \Rightarrow 0 = v_1.\frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a} + \sqrt{v^2 - v_1^2}.\frac{b}{2.a}$$

$$\sqrt{v^2 - v_1^2}.b = -v_1.\sqrt{4.a^2 - b^2} \Rightarrow (v^2 - v_1^2).b^2 = v_1^2.(4.a^2 - b^2)$$

$$v^2.b^2 = v_1^2.4.a^2 \Rightarrow v_1^2 = \frac{b^2}{4.a^2}.v^2 \Rightarrow v_1 = \frac{b}{2.a}.v = sen(\theta_2).v = cos(\theta_1).v$$

Portanto, fica fácil determinar v_2:

$$v_2 = \sqrt{v^2 - v_1^2} = \sqrt{v^2 - \left[\frac{b}{2.a}.v\right]^2} = \frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}.v = cos(\theta_2).v = sen(\theta_1).v$$

Finalmente podemos calcular os vetores velocidade:

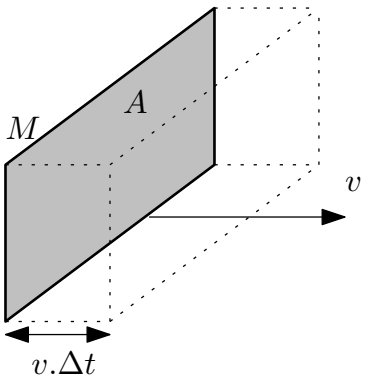
$$\vec{v}_1 = v_1.cos(\theta_1)\,\hat{x} + v_1.sen(\theta_1)\,\hat{y} = \frac{b}{2.a}.v.\frac{b}{2.a}\,\hat{x} + \frac{b}{2.a}.v.\frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}\,\hat{y} = \frac{b^2}{4.a^2}.v\,\hat{x} + \frac{b.\sqrt{4.a^2 - b^2}}{4.a^2}.v\,\hat{y}$$

$$\vec{v}_2 = v_2.cos(\theta_2)\ \hat{x} - v_2.sen(\theta_2)\ \hat{y} = \frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}.v.\frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}\ \hat{x} - \frac{\sqrt{4.a^2 - b^2}}{2.a}.v\frac{b}{2.a}\ \hat{y}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{4.a^2 - b^2}{4.a^2}.v\ \hat{x} - \frac{b.\sqrt{4.a^2 - b^2}}{4.a^2}.v\ \hat{y}$$

¶**Note:** o gabarito mostra que Moysés chamou de 2 o corpo que chamamos de 1, então os resultados estão permutados.

9.20 Resistência do ar na visão de Newton



Resolvemos de forma incansável problemas com as condições iniciais: 1 corpo se movendo, outro parado e após a colisão, os dois se movendo. Vamos usar a solução das velocidades que vimos na Equação 9.4.11:

$$v_{f_1} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_1} + \frac{2.m_2}{m_1 + m_2}.v_{i_2}$$

$$v_{f_2} = \frac{2.m_1}{m_1 + m_2}.v_{i_1} - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right).v_{i_2}$$

Se 1 é a placa, com velocidade v e 2 é a partícula com velocidade nula, teremos:

$$v_{f_1} = \left(\frac{M - m}{M + m}\right).v \approx v$$

$$v_{f_2} = \frac{2.M}{M + m}.v \approx 2.v$$

Com isso, a força média aplicada na partícula é:

$$F_{pa} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{m.\Delta v_2}{\Delta t} = \frac{m.2.v}{\Delta t}$$

A força aplicada à partícula é igual, em módulo, e aposta, em sentido, à aplicada na placa:

$$F_{pl} = -F_{pa} = -\frac{m.2.v}{\Delta t}$$

Isso vale para 1 partícula, para um número N, teremos a força total:

$$F = N.F_{pl} = -N.\frac{m.2.v}{\Delta t}$$

O número N é dado por:

$$N = n.V = n.A.x = n.A.v.\Delta t$$

Substituindo:

$$F = -n.A.v.\Delta t.\frac{m.2.v}{\Delta t} = -2.n.m.v^2.A = -2.\rho.v^2.A$$

CAPÍTULO

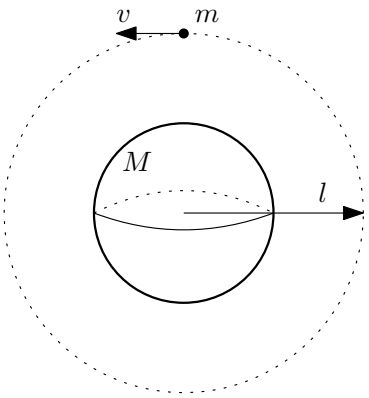
10

GRAVITAÇÃO

"A ciência humana de maneira nenhuma nega a existência de Deus. Quando considero quantas e quão maravilhosas coisas o homem compreende, pesquisa e consegue realizar, então reconheço claramente que o espírito humano é obra de Deus, e a mais notável."

Galileu Galilei

10.1 Massa da Lua



A velocidade da nave é, naturalmente, a distância que a mesma percorre em um determinado tempo. O tempo levado para percorrer $2.\pi.l$ é exatamente o período T:

$$v = \frac{2.\pi.l}{T}$$

Podemos aplicar a Segunda Lei de Newton, já que o movimento de rotação só ocorre por conta da resultante centrípeta gerada pela atração gravitacional:

$$F_r = m.a_r = m.\frac{v^2}{l} \Rightarrow \frac{G.m.M}{l^2} = m.\frac{v^2}{l} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{l}}$$

Igualando as duas equações, podemos isolar a massa M da Lua:

$$\frac{2.\pi.l}{T} = \sqrt{\frac{G.M}{l}} \Rightarrow \frac{G.M}{l} = \left[\frac{2.\pi.l}{T}\right]^2 \Rightarrow M = \frac{l}{G}.\left[\frac{2.\pi.l}{T}\right]^2 = \frac{l^3}{G}.\left[\frac{2.\pi}{T}\right]^2$$

Substituindo os valores*:

$$M = \frac{(113.10^3 + 1738.10^3)^3}{6,67.10^{-11}}.\left[\frac{2.\pi}{3600 + 59.60}\right]^2 = 7,35.10^{22}\ Kg$$

*Lembre-se que o tempo deve ser usado em segundos.

10.2 Satélite em órbita próxima à superfície de um Planeta

a Período só depende da densidade

Como vimos no problema anterior, temos neste caso a seguinte relação:

$$\frac{2.\pi.l}{T} = \sqrt{\frac{G.M}{l}}$$

Como estamos próximos à superfície, vale que $l \to R$, logo:

$$\frac{2.\pi.R}{T} = \sqrt{\frac{G.M}{R}} \Rightarrow T = 2.\pi.R.\sqrt{\frac{R}{G.M}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{R^3}{G.M}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{1}{G}.\frac{R^3}{M}}$$

Partindo da definição de densidade volumétrica, obtemos:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}.\pi.R^3} \Rightarrow \frac{3}{4.\pi}.\frac{M}{R^3} \Rightarrow \frac{R^3}{M} = \frac{3}{4.\pi.\rho}$$

Substituindo na expressão do Período:

$$T = 2.\pi.\sqrt{\frac{1}{G}.\frac{3}{4.\pi.\rho}} = \sqrt{\frac{3.\pi}{G.\rho}}$$

b Período no de rotação de um satélite próximo à Terra

Vamos apenas aplicar a equação desenvolvida anteriormente:

$$T = \sqrt{\frac{3.\pi}{6,67.10^{-11}.5,52}} = 1,60.10^5 \ s = 2667 \ min = 44,4 \ h$$

c Velocidade da órbita

A velocidade pode ser escrita como:

$$v = \frac{2.\pi.R}{T}$$

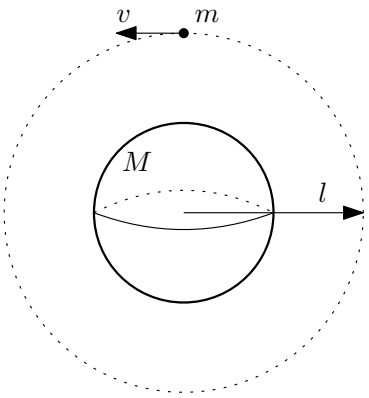
Sabemos como escrever o período, então:

$$v = \frac{2.\pi.R}{\sqrt{\frac{3.\pi}{G.\rho}}} = 2.\pi.R.\sqrt{\frac{G.\rho}{3.\pi}} = 2.R.\sqrt{\pi.\frac{G.\rho}{3}}$$

Então, obtemos:

$$v = 2.(6371.10^3).\sqrt{\pi.\frac{6,67.10^{-11}.5,52}{3}} = 250 \ \frac{m}{s} = 0,25 \ \frac{Km}{s}$$

10.3 Partícula em órbita circular



a Energia total da partícula

A energia potencial gravitacional é dada por:

$$U = -\frac{G.m.M}{l}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, podemos determinar a energia cinética da partícula:

$$F_r = m.a_r = m.\frac{v^2}{l} \Rightarrow \frac{G.m.M}{l^2} = m.\frac{v^2}{l} \Rightarrow m.v^2 = \frac{G.m.M}{l}$$

$$K = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.\frac{G.m.M}{l}$$

Portanto, a energia total é dada por:

$$E = U + K = -\frac{G.m.M}{l} + \frac{1}{2}.\frac{G.m.M}{l} = -\frac{1}{2}.\frac{G.m.M}{l} = \frac{U}{2}$$

b Relação entre velocidade e raio da órbita

Quando aplicamos a Segunda Lei de Newton já obtemos oque se pede:

$$m.v^2 = \frac{G.m.M}{l} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{l}}$$

Ou seja, $v \propto \frac{1}{\sqrt{l}}$.

10.4 Satélite orbitando um Planeta p

a Velocidade de escape

A velocidade de escape é a dada pela energia cinética tal que o corpo pode ser enviado um ponto no espaço que a atração gravitacional seja nula, ou seja, no infinito:

$$\frac{1}{2}.m.v_e^2 - \frac{G.m.M}{R_p} = E_{infinito} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{2.\frac{G.M}{R_p}}$$

Lembre que a aceleração gravitacional pode ser determinada por G, M e R_p, sendo $g_p = \frac{G.M}{R_p^2}$. Portanto:

$$v_e = \sqrt{2.g_p.R_p}$$

Lembre que inicialmente o satélite está orbitando o Planeta, ou seja, há uma velocidade v_o inicial. Ela pode ser calculada com a Segunda Lei de Newton:

$$F_r = m.a_r = m.\frac{v_o^2}{R_p} \Rightarrow \frac{G.m.M}{R_p^2} = m.g_p = m.\frac{v_o^2}{R_p} \Rightarrow v_o = \sqrt{g_p.R_p}$$

Logo, a velocidade de escape é:

$$v_e = \sqrt{2}.v_o$$

O problema pede para que calculemos a velocidade, mas na verdade quer saber o acréscimo de velocidade que deve ocorrer para que o corpo escape, ou seja:

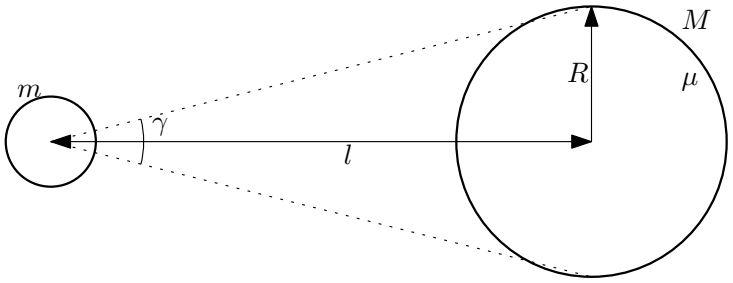
$$v = v_e - v_o = (\sqrt{2} - 1).v_o = (\sqrt{2} - 1).\sqrt{g_p.R_p}$$

b Aplicando à Terra

Na Terra, temos $g_p = 9,81\ \frac{m}{s^2}$ e $R_p = 6371.10^3\ m$. Portanto, obtemos:

$$v = (\sqrt{2} - 1).\sqrt{9,81.6371.10^3} = 3,3.10^3\ \frac{m}{s} = 3,3\ \frac{Km}{s}$$

10.5 Densidade média do Sol



Como já foi feito anteriormente, vamos escrever o período em função da órbita e da velocidade:

$$v = \frac{2.\pi.l}{T} \Rightarrow T = \frac{2.\pi.l}{v}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, podemos obter a velocidade:

$$F_r = m.a_r \Rightarrow \frac{G.m.M}{l^2} = m.\frac{v^2}{l} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{l}}$$

Queremos a densidade, então vamos substituir a massa M pela densidade:

$$\mu = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \mu.V = \mu.\frac{4}{3}.\pi.R^3$$

Substituindo, obtemos uma velocidade igual a:

$$v = \sqrt{\frac{G.\mu.\frac{4}{3}.\pi.R^3}{l}} = \sqrt{\frac{4}{3}.\frac{G.\mu.\pi.R^3}{l}}$$

Retornando à expressão do período:

$$T = \frac{2.\pi.l}{\sqrt{\frac{4}{3}.\frac{G.\mu.\pi.R^3}{l}}} = \pi.l.\sqrt{\frac{3.l}{G.\mu.\pi.R^3}} = \sqrt{\frac{3.\pi}{G.\mu}.\frac{l^3}{R^3}} \Rightarrow T^2 = \frac{3.\pi}{G.\mu}.\frac{l^3}{R^3}$$

$$\mu = \frac{3.\pi}{G.T^2}.\frac{l^3}{R^3}$$

Não sabemos explicitamente quando vale a razão l/R, mas temos o diâmetro angular do Sol visto da Terra. Aplicando a tangente deste ângulo, temos:

$$tg\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{R}{l} \Rightarrow \frac{l}{R} = \frac{1}{tg\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Substituindo, obtemos:

$$\mu = \frac{3.\pi}{G.T^2}.\frac{1}{tg^3\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

Substituindo os valores:

$$\mu = \frac{3.\pi}{6,67.10^{-11}(365.24.3600)^2} . \frac{1}{tg^3\left(\frac{0,55^\circ}{2}\right)} = 1,3.10^3 \ \frac{Kg}{m^3}$$

10.6 Movimento estrelar e terrestre

Aplicando a Segunda Lei de Newton para a Estrela e para a Terra, respectivamente, obtemos:

$$F_r = m_e.a_r \Rightarrow \frac{G.m_g.m_e}{R_g^2} = m_e.\frac{v_g^2}{R_g} \Rightarrow m_g = \frac{v_g^2.R_g}{G}$$

$$F_r = m_t.a_r \Rightarrow \frac{G.m_s.m_t}{R^2} = m_t.\frac{v^2}{R} \Rightarrow m_s = \frac{v^2.R}{G}$$

Calculando a razão entre as massas, obtemos:

$$\frac{m_g}{m_s} = \frac{\frac{v_g^2.R_g}{G}}{\frac{v^2.R}{G}} = \frac{v_g^2.R_g}{v^2.R}$$

a Estimando a velocidade v_g

Primeiro, vamos aplicar a Segunda Lei de Newton ao sistema Galáxia/Sistema Solar:

$$F_r = m_{ss}.a_r \Rightarrow \frac{G.m_{ss}.m_g}{R_{ss}^2} = m_{ss}.\frac{v_{ss}^2}{R_{ss}} \Rightarrow m_g = \frac{v_{ss}^2.R_{ss}}{G}$$

O resultado do item ***(b)*** do Problema 10.3 diz que $v = \sqrt{\frac{G.M}{l}}$. Substituindo $M \to m_g$:

$$v_g = \sqrt{\frac{G.m_g}{R_g}} \Rightarrow v_g = \sqrt{\frac{G.\frac{v_{ss}^2.R_{ss}}{G}}{R_g}} = \sqrt{\frac{R_{ss}}{R_g}}.v_{ss}$$

Como $R_{ss} = \frac{3}{5}.R_g$, obtemos que a velocidade da Galaxia é:

$$v_g = \sqrt{\frac{3}{5}}.200.10^3 = 155\ \frac{Km}{s}$$

b Estimando a razão entre m_g e m_s

Vamos apenas substituir os valores na equação obtida inicialmente:

$$\frac{m_g}{m_s} = \frac{v_g^2.R_g}{v^2.R}$$

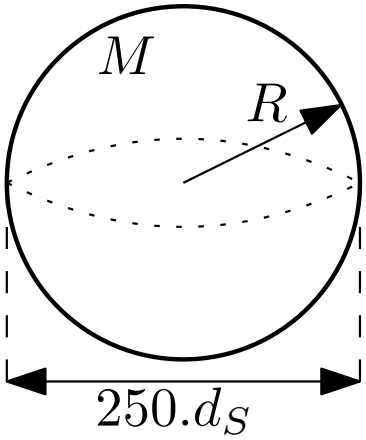
Lembre que:

$$v = \frac{2.\pi.R}{T}$$

Logo:

$$\frac{m_g}{m_s} = \frac{v_g^2.R_g}{4.\pi^2.R^3}.T^2 = \frac{(155.10^3)^2.(5.10^4.3.10^8.365.24.3600)}{4.\pi^2.(1,51.10^{11})^3}.(365.24.3600)^2 = 0,8.10^{11} \approx 10^{11}$$

10.7 Deduzindo os resultados de Laplace



Inicialmente, vamos calcular a velocidade de escape:

$$\frac{1}{2}.m.v_e^2 - \frac{G.M.m}{r} = 0 \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2.G.M}{r}}$$

Como o diâmetro é o dobro do raio, obtemos:

$$v_e = \sqrt{\frac{4.G.M}{d}} = 2.\sqrt{\frac{G.M}{d}} = 2.\sqrt{\frac{G.M}{250.d_S}}$$

Podemos calcular a massa M partindo da definição de densidade:

$$\rho_T = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}.\pi.R^3} \Rightarrow M = \rho_T.\frac{4}{3}.\pi.R^3 = \rho_T.\frac{4}{3}.\pi.\left(\frac{d}{2}\right)^3$$

$$M = \rho_T.\frac{4}{3}.\pi.\left(250.\frac{d_S}{2}\right)^3 = \rho_T.\frac{4}{3}.\pi.(125.d_S)^3 = \frac{4.125^3}{3}.\rho_T.\pi.d_S^3$$

Substituindo na equação da velocidade de escape:

$$v_e = 2.\sqrt{\frac{G.\frac{4.125^3}{3}.\rho_T.\pi.d_S^3}{250.d_S}} = 2.\sqrt{\frac{4.125^3.\pi}{3.250}.G.\rho_T.d_S^2} = 2.\sqrt{\frac{2^2.125^3.\pi}{3.2.125}.G.\rho_T.d_S^2} = 2.2.125.\sqrt{\frac{\pi}{6}.G.\rho_T}.d_S$$

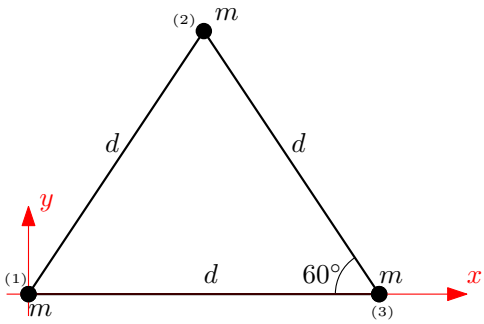
$$v_e = 500.d_S.\sqrt{\frac{\pi}{6}.G.\rho_T}$$

Agora vamos substituir os valores:

$$v_e = 500.1,4.10^9.\sqrt{\frac{\pi}{6}.6,67.10^{-11}.5,52.10^3} = 3.10^8 \ \frac{m}{s}$$

Lembre que essa é a velocidade da luz, qualquer entidade com massa não pode chegar à essa velocidade. Portanto, é impossível escapar.

10.8 Sistema de 3 partículas em arranjo triangular



a Força gravitacional que atua em cada partícula

Como as distâncias e as massas são iguais, podemos afirmar que o módulo das forças gravitacionais sobre cada massa será a mesma para todos os corpos. Por motivos de simetria do triângulo equilátero, podemos afirmar também que todos os vetores de força gravitacional apontam para o mesmo ponto.

Vamos, inicialmente, calcular a posição do centro de massa:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m.\vec{r}_1 + m.\vec{r}_2 + m.\vec{r}_3}{3.m} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2 + \vec{r}_3}{3}$$

O vetor $\vec{r}$ que localiza cada corpo em relação à origem é:

$$\vec{r}_1 = \vec{0}$$

$$\vec{r}_2 = d.cos(60°)\ \hat{x} + d.sen(60°)\ \hat{y} = \frac{d}{2}\ \hat{x} + \frac{\sqrt{3}.d}{2}\ \hat{y}$$

$$\vec{r}_3 = d\ \hat{x}$$

Somando vetorialmente:

$$\vec{r}_{CM} = \frac{\vec{0} + \left[\frac{d}{2}\ \hat{x} + \frac{\sqrt{3}.d}{2}\ \hat{y}\right] + d\ \hat{x}}{3} = \frac{\frac{3.d}{2}\ \hat{x} + \frac{\sqrt{3}.d}{2}\ \hat{y}}{3} = \frac{d}{2}\ \hat{x} + \frac{d}{2.\sqrt{3}}\ \hat{y}$$

Vamos calcular o vetor de força gravitacional de algum dos corpos, por exemplo, do (1) que está na origem:

$$\vec{F} = \vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{1/3} = \frac{G.m.m}{d^2}\ \hat{r}_2 + \frac{G.m.m}{d^2}\ \hat{r}_3 = \frac{G.m.m}{d^2}.(\hat{r}_2 + \hat{r}_3) = \frac{G.m^2}{d^2}.(\hat{r}_2 + \hat{r}_3)$$

Os vetores unitários serão exatamente os calculados anteriores, mas divididos pelo módulo, ou seja:

$$\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{d} = \frac{1}{2}\ \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \hat{y}$$

$$\hat{r}_3 = \frac{\vec{r}_3}{d} = 1\ \hat{x}$$

Substituindo:

$$\vec{F} = \frac{G.m^2}{d^2}.\left(\frac{1}{2}\ \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \hat{y} + 1\ \hat{x}\right) = \frac{G.m^2}{d^2}.\left(\frac{3}{2}\ \hat{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\ \hat{y}\right) = \frac{3.G.m^2}{d^2}.\left(\frac{1}{2}\ \hat{x} + \frac{1}{2.\sqrt{3}}\ \hat{y}\right)$$

Perceba que a força aponta exatamente para o centro de massa que calculamos anteriormente. Agora vamos calcular o módulo da mesma:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \frac{3.G.m^2}{d^2}.\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{3.G.m^2}{d^2}.\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{12}} = \frac{3.G.m^2}{d^2}.\sqrt{\frac{16}{48}}$$

$$F = \frac{3.G.m^2}{d^2}.\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}.G.m^2}{d^2}$$

b Frequência angular de rotação das massas

Como as forças apontam para o centro de massa, ela funcionará como resultante centrípeta, fazendo todos os corpos girarem entorno do centro de massa. Aplicando a Segunda Lei de Newton, temos:

$$F = m.\frac{v^2}{r_{cm}}$$

Agora usamos a relação de que $v = \omega.r_{CM}$, sendo ω a frequência angular que queremos:

$$F = m.\frac{\omega^2.r_{CM}^2}{r_{CM}} = m.\omega^2.r_{CM} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}.G.m^2}{d^2} = m.\omega^2.r_{CM} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}.G.m}{r_{CM}.d^2}}$$

Só precisamos calcular o módulo do vetor $\vec{r}_{CM}$:

$$r_{CM} = \sqrt{r_{CM_x}^2 + r_{CM_y}^2} = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2.\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Portanto:

$$\omega = \sqrt{\frac{\sqrt{3}.G.m}{\frac{d}{\sqrt{3}}.d^2}} = \sqrt{\frac{3.G.m}{d^3}}$$

10.9 Descrição de uma estrela binária

a Demonstrando relação entre períodos

Pelo Teorema da Massa Reduzida, podemos calcular o período de oscilação da estrela binária em torno do centro de massa:

$$\mu.\ddot{r} = \frac{G.m_1.m_2}{r^2} \Rightarrow \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.\frac{v^2}{r} = \frac{G.m_1.m_2}{r^2} \Rightarrow \frac{1}{m_1+m_2}.v^2 = \frac{G}{r}$$

Lembre que a velocidade pode ser expressa em função do período:

$$v = \frac{2.\pi.r}{T}$$

Portanto:

$$\frac{1}{m_1+m_2}.\left(\frac{2.\pi.r}{T}\right)^2 = \frac{G}{r} \Rightarrow T^2 = \frac{1}{m_1+m_2}.(2.\pi.r)^2.\frac{r}{G} = \frac{4.\pi^2.r^3}{m_1+m_2}.\frac{1}{G}$$

No caso do período da Terra (T_S), teremos a mesma expressão, mas com algumas alterações: $m_1 + m_2 \to M_S$ e $r \to R$:

$$T_S^2 = \frac{4.\pi^2.R^3}{M_S}.\frac{1}{G}$$

Calculando a razão entre os períodos, obtemos:

$$\frac{T^2}{T_S^2} = \frac{\frac{4.\pi^2.r^3}{m_1+m_2}.\frac{1}{G}}{\frac{4.\pi^2.R^3}{M_S}.\frac{1}{G}} = \frac{M_S}{m_1+m_2}.\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

b Período da estrela dupla Sirius A - Sirius B

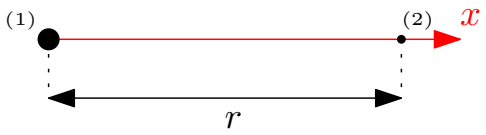
Vamos isolar o período da estrela dupla na expressão obtida:

$$\frac{T^2}{T_S^2} = \frac{M_S}{m_1+m_2}.\left(\frac{r}{R}\right)^3 \Rightarrow T^2 = \frac{M_S}{m_1+m_2}.\left(\frac{r}{R}\right)^3.T_S^2 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{M_S}{m_1+m_2}.\left(\frac{r}{R}\right)^3}.T_S$$

Lembre que o raio R (distância entre o Sol e a Terra) é usado para definir a unidade astronômica, ou seja, $R = 1\ U.A.$, então podemos usar a distância r em unidade astronômica mesmo.

$$T = \sqrt{\frac{M_S}{2,2.M_S+0,9.M_S}.\left(\frac{19,9}{1}\right)^3}.1 = \sqrt{\frac{1}{2,2+0,9}.(19,9)^3} = 50,4\ anos$$

c Raio da órbita de cada Estrela individualmente



Fixando a Sirius A na origem do sistema de coordenadas, o centro de massa está em:

$$x_{CM} = \frac{m_1.x_1 + m_2.x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2,2.M_S.0 + 0,9.M_S.19,9}{2,2.M_S + 0,9.M_S} = \frac{0,9.19,9}{3,1}$$

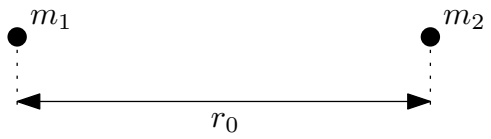
Como fixamos Sirius A na origem, seu raio órbita será:

$$r_1 = x_{CM} = \frac{0,9.19,9}{3,1} = 5,8\ U.A.$$

Como sabemos a distância r entre as Estrelas, podemos facilmente determinar r_2:

$$r = r_1 + r_2 \Rightarrow r_2 = r - r_1 = 19,9 - 5,8 = 14,1\ U.A.$$

10.10 Velocidade de corpos sujeitos à atração gravitacional



Por conservação de momento linear, temos:

$$0 = m_1.v_1 + m_2.v_2$$

E vale também a conservação da energia mecânica:

$$-\frac{G.m_1.m_2}{r_0} = -\frac{G.m_1.m_2}{r} + \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

Reorganizando a equação de conservação da energia, obtemos:

$$-\frac{G.m_1.m_2}{r_0} + \frac{G.m_1.m_2}{r} = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2 \Rightarrow G.m_1.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = \frac{1}{2}.m_1.v_1^2 + \frac{1}{2}.m_2.v_2^2$$

$$m_1.v_1^2 + m_2.v_2^2 = 2.G.m_1.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Podemos isolar a velocidade v_2 na equação de conservação do momento linear e substituir na equação desenvolvida agora:

$$m_1.v_1^2 + m_2.\left(-\frac{m_1}{m_2}.v_1\right)^2 = 2.G.m_1.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow m_1.v_1^2 + \frac{m_1^2}{m_2}.v_1^2 = 2.G.m_1.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

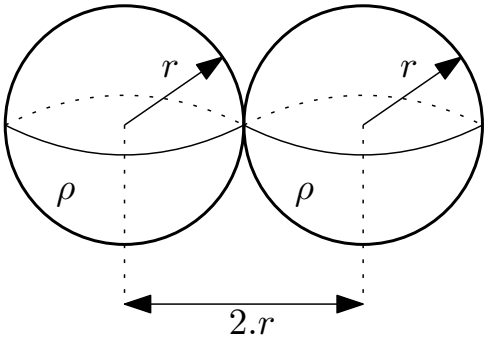
$$v_1^2 + \frac{m_1}{m_2}.v_1^2 = 2.G.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow v_1^2.\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = 2.G.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

$$v_1^2.\left(\frac{m_2 + m_1}{m_2}\right) = 2.G.m_2.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2.G.m_2^2}{m_1 + m_2}.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} = m_2.\sqrt{\frac{2.G}{m_1 + m_2}.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

Usando a conservação do momento linear, obtemos a velocidade do corpo 2:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2}.v_1 = -m_1.\sqrt{\frac{2.G}{m_1 + m_2}.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)} \Rightarrow |v_2| = m_1.\sqrt{\frac{2.G}{m_1 + m_2}.\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

10.11 Atração entre duas esferas encostadas



Não sabemos a massa total de cada esfera, mas sabemos o raio e a densidade. Partindo da densidade, obtemos:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho.V = \rho.\frac{4}{3}.\pi.r^3 = 11,3.\frac{4}{3}.\pi.50^3 = 5,92.10^6\ g$$

$$M = 5,92.10^3\ Kg$$

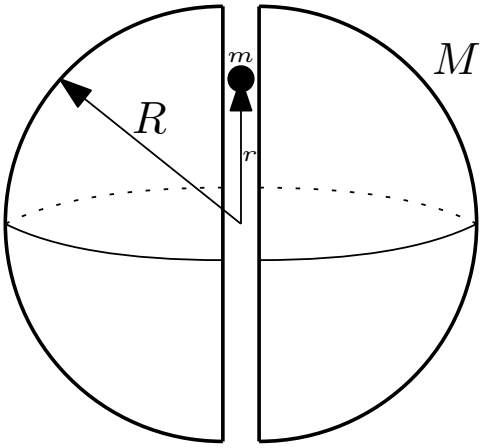
Podemos considerar que a massa de ambas as esferas está toda concentrada no seus centros, ou seja, a distância entre essas partículas pontuais seria $2.r$, logo:

$$F = \frac{G.M.M}{(2.r)^2} = G.\left(\frac{M}{2.r}\right)^2 = 6,67.10^{-11}.\left(\frac{5,92.10^3}{2.0,5}\right)^2 = 2,34.10^{-3}\ N$$

Dividindo por $g = 9,8\ \frac{m}{s^2}$, convertemos a força para Kgf:

$$F = \frac{2,34.10^{-3}}{9,8} = 2,39.10^4\ Kgf$$

10.12 Túnel que passa pelo centro da Terra



Lembre que ao entrarmos em uma distribuição de massa, a quantidade de massa que contribui para a atração gravitacional é apenas aquela que "enxergamos", ou seja, para uma distribuição esférica de raio R, se estivermos em $r < R$, apenas a massa que está em r contribuirá para a atração. Na prática, podemos calcular essa quantidade de massa com base na densidade que deve ser constante:

$$\rho = \frac{m'}{v} = \frac{M}{V} \Rightarrow m' = \frac{v}{V}.M = \frac{\frac{4}{3}.\pi.r^3}{\frac{4}{3}.\pi.R^3}.M = \frac{r^3}{R^3}.M$$

Podemos agora calcular a força gravitacional entre m e m':

$$F = \frac{G.m.m'}{r^2} = \frac{G.m.\frac{r^3}{R^3}.M}{r^2} = \frac{G.m.M}{R^3}.r$$

Lembre que a força elástica é $k.x$, observe que a força obtida é do mesmo tipo. Temos que:

$$k \rightarrow \frac{G.m.M}{R^3}$$

$$x \Rightarrow r$$

Lembre que no caso da mola, a frequência angular é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{G.m.M}{R^3}}{m}} = \sqrt{\frac{G.M}{R^3}}$$

Com ω podemos descobrir o período:

$$\omega = 2.\pi.f = \frac{2.\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2.\pi}{\omega}$$

Portanto, obtemos:

$$T = \frac{2.\pi}{\sqrt{\frac{G.M}{R^3}}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{R^3}{G.M}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{(6,38.10^6)^3}{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}}} = 5074\ s = 84,6\ min$$

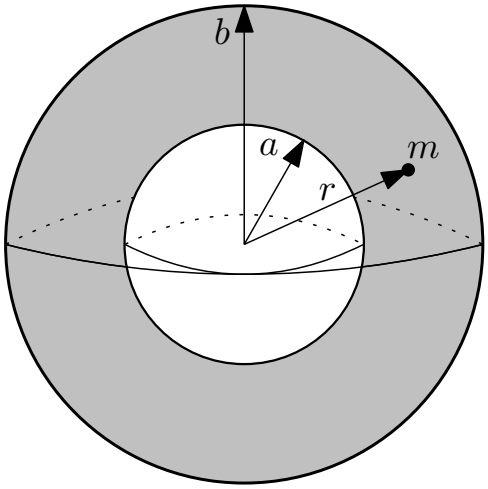
Para determinar a velocidade ao passar pelo centro, podemos verificar a quantidade de energia armazenada na "mola"com constante elástica k e amplitude de oscilação igual ao raio R da Terra:

$$E = \frac{1}{2}.k.A^2 = \frac{1}{2}.\frac{G.m.M}{R^3}.R^2 = \frac{G.m.M}{2.R}$$

Toda essa energia deve ser convertida em energia cinética para a massa m:

$$\frac{G.m.M}{2.R} = \frac{1}{2}.m.v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11}.5,97.10^{24}}{6,38.10^6}} = 7,9.10^3 \ \frac{m}{s} = 7,9 \ \frac{Km}{s}$$

10.13 Campo gravitacional gerado por casca esférica



Teremos que calcular novamente a quantidade de massa m' que está dentro do raio r que irá contribuir com a atração gravitacional. Considerando novamente a densidade como constante, obtemos:

$$\frac{m'}{v} = \frac{M}{V} \Rightarrow m' = \frac{v}{V}.M = \frac{\frac{4}{3}.\pi.r^3 - \frac{4}{3}.\pi.a^3}{\frac{4}{3}.\pi.b^3 - \frac{4}{3}.\pi.a^3}.M = \frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}.M$$

Lembre que a aceleração gravitacional é dada por:

$$g = \frac{G.m'}{r^2}$$

Portanto, substituindo:

$$g = \frac{G}{r^2}.\frac{r^3 - a^3}{b^3 - a^3}.M = \frac{G.M}{r^2}.\left[\frac{r^3}{b^3 - a^3} - \frac{a^3}{b^3 - a^3}\right] = G.M.\left[\frac{r}{b^3 - a^3} - \frac{1}{r^2}.\frac{a^3}{b^3 - a^3}\right]$$

A massa total pode ser substituída pela densidade:

$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow M = \rho.V = \rho.\left[\frac{4}{3}.\pi.b^3 - \frac{4}{3}.\pi.a^3\right] = \frac{4}{3}.\pi.\rho.(b^3 - a^3)$$

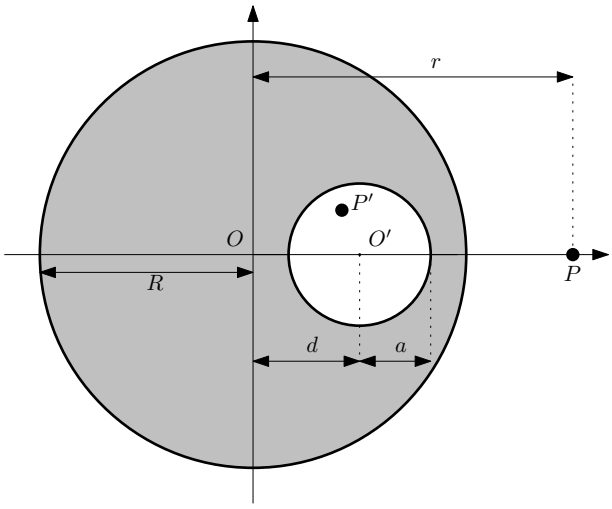
Assim, obtemos que a aceleração gravitacional é:

$$g = G.\frac{4}{3}.\pi.\rho.(b^3 - a^3).\left[\frac{r}{b^3 - a^3} - \frac{1}{r^2}.\frac{a^3}{b^3 - a^3}\right] = \frac{4}{3}.G.\pi.\rho.\left[r - \frac{a^3}{r^2}\right] = \frac{4}{3}.G.\pi.\rho.\left[\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right]$$

Perceba que $r^3 - a^3 = (r - a).(r^2 + a.r + a^2)$, mas como $r \approx a$ (no caso de uma camada delgada), temos que $r^2 + a.r + a^2 \approx 3.r^2$. Portanto:

$$g = \frac{4}{3}.G.\pi.\rho.\left[\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right] \approx \frac{4}{3}.G.\pi.\rho.\left[\frac{(r - a).3.r^2}{r^2}\right] = 4.G.\pi.\rho.(r - a)$$

10.14 Distribuição de massa com cavidade



a Razão entre os campos gravitacionais

Queremos a razão entre os campos gravitacionais gerados pela distribuição com a cavidade e sem a cavidade (distribuição maciça):

$$\kappa = \frac{g_{cav}}{g_{tot}} = \frac{\frac{F_{cav}}{m}}{\frac{F_{tot}}{m}} = \frac{F_{cav}}{F_{tot}}$$

A força F_{tot} é facilmente determinada, basta considerarmos que toda a massa está no centro da distribuição, pois a densidade é constante[†]:

$$F_{tot} = \frac{G.m.M}{r^2} = \frac{G.m.\rho.V}{r^2}$$

Para a força considerando a cavidade, teremos algo semelhante, mas agora consideraremos a cavidade como sendo uma massa negativa posicionada no centro da cavidade, ou seja:

$$F_{cav} = \frac{G.m.M}{r^2} - \frac{G.m.m'}{(r-d)^2} = \frac{G.m.\rho.V}{r^2} - \frac{G.m.\rho.v}{(r-d)^2}$$

Vamos agora calcular a razão:

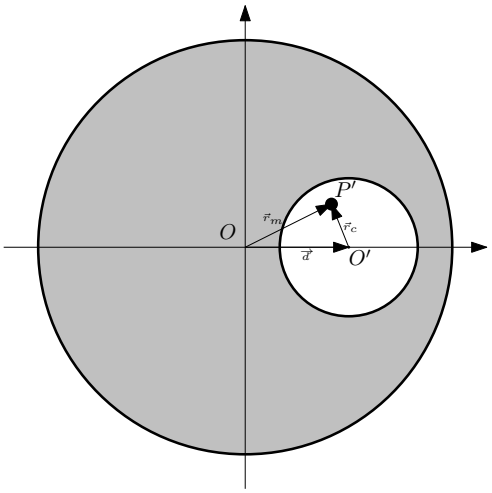
$$\kappa = \frac{\frac{G.m.\rho.V}{r^2} - \frac{G.m.\rho.v}{(r-d)^2}}{\frac{G.m.\rho.V}{r^2}} = 1 - \frac{v}{V}.\frac{r^2}{(r-d)^2} = 1 - \frac{\frac{4}{3}.\pi.a^3}{\frac{4}{3}.\pi.R^3}.\frac{r^2}{(r-d)^2} = 1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3.\frac{r^2}{(r-d)^2}$$

Simplificando:

$$\kappa = 1 - \frac{(\frac{a}{R})^3}{(\frac{r-d}{r})^2} = 1 - \frac{(a/R)^3}{\left(1-\frac{d}{r}\right)^2}$$

[†]Usaremos ρ para a densidade, V para o volume da esfera e v para o volume da cavidade.

b Campo gravitacional dentro da cavidade



Vamos inicialmente considerar a aceleração gravitacional gerada pela esfera maciça.

$$\vec{g}_m = \frac{\vec{F}_m}{m} = -\frac{G.m'}{r_m^2}\,\hat{r_m} = -\frac{G.\rho.v}{r_m^2}\,\hat{r_m} = -\frac{G.\rho.\frac{4}{3}.\pi.r_m^3}{r_m^2}\,\hat{r_m}$$

$$\vec{g}_m = -\frac{4}{3}.G.\rho.\pi.r_m\,\hat{r_m}$$

O campo gravitacional gerado sobre a massa m pela cavidade é análogo, mas positivo, pois a "massa da cavidade"é negativa, e apontará para o centro da cavidade:

$$\vec{g}_c = \frac{4}{3}.G.\rho.\pi.r_c\,\hat{r}_c$$

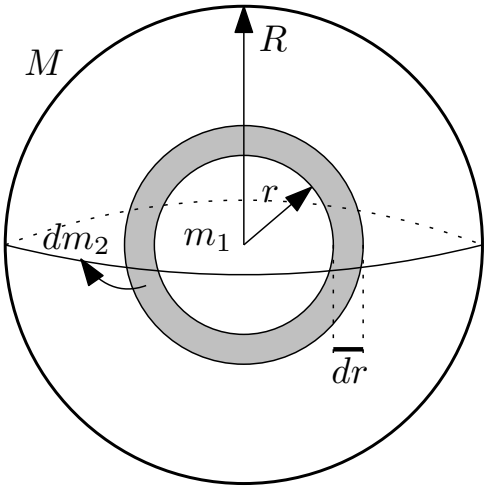
Logo, a aceleração total é:

$$\vec{g} = \vec{g}_m + \vec{g}_c = -\frac{4}{3}.G.\rho.\pi.r_m\,\hat{r_m} + \frac{4}{3}.G.\rho.\pi.r_c\,\hat{r}_c = \frac{4}{3}.G.\rho.\pi.(r_c\,\hat{r}_c - r_m\,\hat{r}_m) = \frac{4}{3}.G.\rho.\pi.(\vec{r}_c - \vec{r}_m)$$

Perceba que $\vec{r}_c - \vec{r}_m = -\vec{d}$, portanto:

$$\vec{g} = -\frac{4}{3}.G.\rho.\pi.\vec{d}$$

10.15 Energia potencial total associada a uma esfera homogênea



A energia potencial associada à atração entre uma massa m_1 e uma massa dm_2 é dada por:

$$dU = -\frac{G.m_1.dm_2}{r}$$

Podemos expressar as massas em função da densidade e do volume. As massas m_1 e dm_2 são, respectivamente:

$$m_1 = \rho.V_1 = \frac{M}{V}.V_1 = \frac{M}{\frac{4}{3}.\pi.R^3}.\frac{4}{3}.\pi.r^3 = M.\frac{r^3}{R^3}$$

$$dm_2 = \rho.dV_2 = \frac{M}{V}.dV_2 = \frac{M}{V}.\frac{d}{dr}(V_2).dr = \frac{M}{\frac{4}{3}.\pi.R^3}.4.\pi.r^2.dr = 3.M.\frac{r^2}{R^3}.dr$$

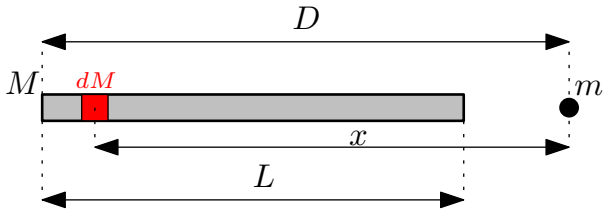
Substituindo no infinitesimal de potencial gravitacional, obtemos:

$$dU = -\frac{G.M.\frac{r^3}{R^3}.3.M.\frac{r^2}{R^3}.dr}{r} = -3.G.M^2\frac{1}{R^6}.\frac{r^5}{r}.dr = -\frac{3.G.M^2}{R^6}.r^4.dr$$

Por fim, perceba que temos uma integral em r, vamos integrar de 0 à R e obter a energia potencial gravitacional associada a esfera:

$$U = -\frac{3.G.M^2}{R^6}.\int_0^R r^4\ dr = -\frac{3.G.M^2}{R^6}.\left[\frac{R^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] \Rightarrow U = -\frac{3}{5}.\frac{G.M^2}{R}$$

10.16 Atração gravitacional gerada por um fio retilíneo homogêneo



A atração entre a massa m e um pedacinho dM de massa do fio é:

$$dF = \frac{G.m.dM}{x^2}$$

Como o fio é homogêneo, sua densidade permanece constante. Assim podemos escrever dM de uma forma mais agradável:

$$\lambda = \frac{M}{L} = \frac{dM}{dx} \Rightarrow dM = \frac{M}{L}.dx$$

Substituindo, obtemos:

$$dF = \frac{G.m.\frac{M}{L}.dx}{x^2} = \frac{G.m.M}{L}.\frac{dx}{x^2}$$

Integrando, obteremos a força total imposta pelo fio sobre a massa m:

$$F = \frac{G.m.M}{L}.\int_{D-L}^{D} \frac{dx}{x^2}$$

Usando a identidade dada no enunciado[‡], chegamos em:

$$F = \frac{G.m.M}{L}.\left(\frac{1}{D-L} - \frac{1}{D}\right)$$

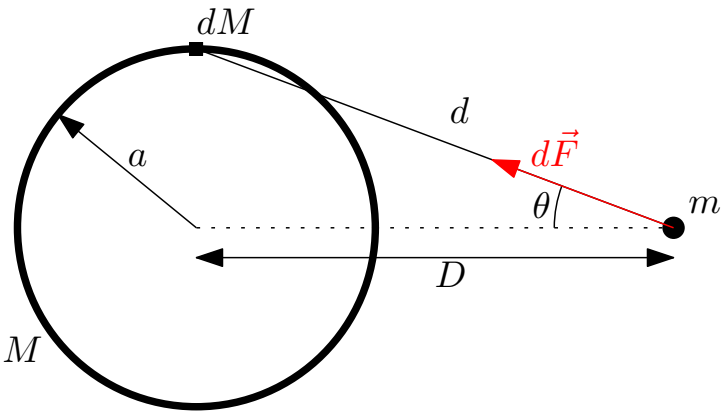
Vamos continuar manipulando algebricamente a equação para obter algo do tipo $F = \frac{G.M.m}{d^2}$:

$$F = \frac{G.m.M}{L}.\left(\frac{D-D+L}{D.(D-L)}\right) = \frac{G.m.M}{L}.\left(\frac{L}{D.(D-L)}\right) = \frac{G.m.M}{D.(D-L)}$$

Ou seja, a força total é a mesma gerada por uma carga pontual de massa M distando $\sqrt{D.(D-L)}$ da massa m.

[‡] $\int_a^b \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

10.17 Atração gravitacional gerada por um anel



A atração entre a massa m e um pedaço de massa dM do anel é:

$$d\vec{F} = \frac{G.m.dM}{d^2}\ \hat{d} = \frac{G.m.dM}{d^2}.(cos(\theta)\ \hat{x} + sen(\theta)\ \hat{y})$$

Perceba que por culpa da simetria circular do anel, cada contribuição em $+\hat{y}$ pode ser anulada por uma contribuição de mesmo módulo, mas em $-\hat{y}$. Com isso, teremos apenas a contribuição horizontal da parte $\hat{x}$. Como queremos apenas o módulo, desconsideraremos agora o tratamento vetorial:

$$dF = \frac{G.m.dM}{d^2}.cos(\theta) = \frac{G.m.dM}{d^2}.\frac{D}{d} = \frac{G.m.D}{d^3}.dM$$

Perceba que d é constante, por isso, ao integrar, teremos apenas $dM \to M$. Então o módulo do vetor força é:

$$F = \frac{G.m.M.D}{d^3}$$

Pelo Teorema de Pitágoras podemos ainda escrever a distância d como função dos parâmetros dados:

$$F = \frac{G.m.M.D}{\sqrt{D^2 + a^2}^3} = \frac{G.m.M.D}{(D^2 + a^2)^{3/2}}$$

CAPÍTULO

11

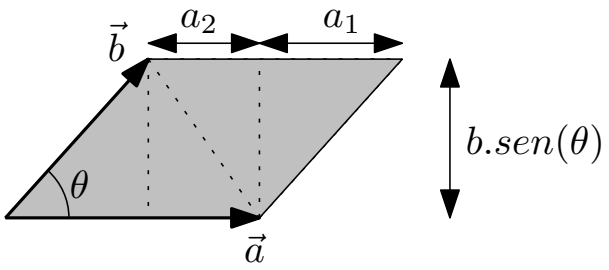
ROTAÇÕES E MOMENTO ANGULAR

"A simplicidade é o último grau de sofisticação. Quando resolvemos um problema complexo, a solução final sempre parece óbvia - mas chegar até ela exige atravessar labirintos de pensamento."

LEONARDO DA VINCI

11.1 Uma curva plana fechada orientada

a Significado de $\vec{a} \times \vec{b}$



Perceba que ao considerar o paralelogramo formado pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$, obtemos 4 figuras: 4 triângulos retângulos de altura $b.sen(\theta)$, sendo 2 com base a_1 e os outros 2 com base a_2, sendo $a_1 + a_2 = a$.

Logo, a área total do paralelogramo é:

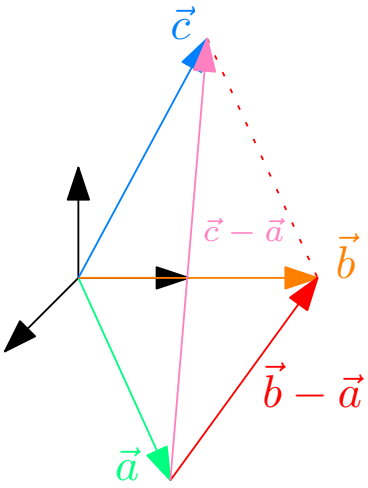
$$S = \frac{a_1.b.sen(\theta)}{2} + \frac{a_1.b.sen(\theta)}{2} + \frac{a_2.b.sen(\theta)}{2} + \frac{a_2.b.sen(\theta)}{2} = a_1.b.sen(\theta) + a_2.b.sen(\theta)$$

$$S = (a_1 + a_2).b.sen(\theta) = a.b.sen(\theta)$$

Perceba que esse é exatamente o módulo do vetor $\vec{a} \times \vec{b}$. Assim, concluímos que:

$$\vec{S} = \vec{a} \times \vec{b}$$

b Área orientada de tetraedro



Teremos que calcular a área orientada de cada face, sempre tomando cuidado para que o vetor resultante aponte para fora, como é dito no enunciado. A face formada pelos vetores $\vec{a}$ e $\vec{c}$ terá área:

$$\vec{S}_1 = \vec{a} \times \vec{c}$$

Fazendo a mesma coisa para as faces formadas pelos vetores $\vec{c}$ e $\vec{b}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$, e $\vec{c} - \vec{a}$ e $\vec{b} - \vec{a}$, respectivamente, teremos:

$$\vec{S}_2 = \vec{c} \times \vec{b}$$

$$\vec{S}_3 = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{S}_4 = \vec{b} \times \vec{a}$$

Portanto, a soma será:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4$$

A área orientada $\vec{S}_3$ não está escrita de uma forma conveniente. Vamos expandi-la:

$$\vec{S}_3 = (\vec{b} - \vec{a}) \times (\vec{c} - \vec{a}) = \vec{b} \times \vec{c} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{a} \times \vec{a}$$

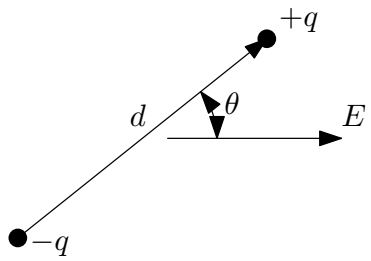
Lembre que $\vec{m} \times \vec{n} = -\vec{n} \times \vec{m}$ e que $\vec{m} \times \vec{m} = \vec{0}$. Com isso, $\vec{S}_3$ é:

$$\vec{S}_3 = -\vec{c} \times \vec{b} - \vec{b} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{c} + \vec{0} = -\vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_4$$

Portanto, concluímos assim que:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 - \vec{S}_1 - \vec{S}_2 - \vec{S}_4 + \vec{S}_4 = \vec{0}$$

11.2 Dipolo elétrico submetido a um campo elétrico



a Força e torque resultantes sobre o dipolo

Quando submetida a um campo elétrico $\vec{E}$, uma carga q sofre uma força dada por:

$$\vec{F} = q.\vec{E}$$

Sendo $\vec{F}_+$ e $\vec{F}_-$, as forças elétricas sobre a carga positiva e negativa, respectivamente. A força total sobre o dipolo é:

$$\vec{F} = \vec{F}_+ + \vec{F}_- = q.\vec{E} - q.\vec{E} = \vec{0}$$

Já o torque será dado por:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times (q.\vec{E}) = q.\vec{r} \times \vec{E}$$

Sendo $\vec{r}$ o chamado "braço de alavanca".
Com isso, o torque total sobre o dipolo é:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_+ + \vec{\tau}_- = q.\vec{r}_+ \times \vec{E} - q.\vec{r}_- \times \vec{E} = q.\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{E} - q.\left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times \vec{E} = q.\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{E} + q.\frac{\vec{d}}{2} \times \vec{E} = q.\vec{d} \times \vec{E}$$

b Energia potencial do dipolo

Da definição de energia, temos que:

$$U = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Já vimos que a força é dada por $q.\vec{E}$. Portanto:

$$U = -\int q.\vec{E} \cdot d\vec{r}$$

Como a força $\vec{F}$ é constante, temos que:

$$U = -q.\vec{E} \cdot \int d\vec{r} = -q.\vec{E} \cdot \vec{r} = -q.\vec{E} \cdot \vec{d} = -\vec{E} \cdot (q.\vec{d}) = -\vec{E} \cdot \vec{p}$$

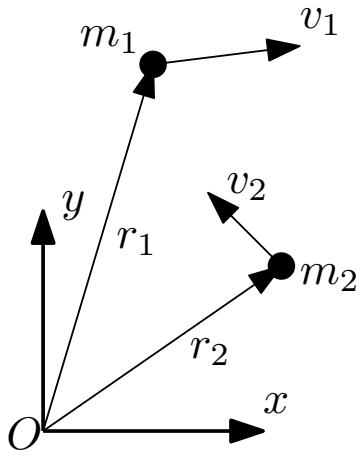
Para acharmos as posições de equilíbrio, derivamos o potencial e igualamos ele a zero:

$$\frac{d}{dr}U = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left[-\vec{E}\cdot\vec{p}\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left[E.p.cos(\theta)\right] = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left[E.q.r.cos(\theta)\right] = 0 \Rightarrow E.q.cos(\theta) = 0$$

$$cos(\theta) = 0$$

As soluções são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$. Na primeira, o momento de dipolo e o campo elétrico apontam no mesmo sentido, então teremos um equilíbrio estável. Já na segunda, apontam em sentidos opostos, então se trata de um equilíbrio instável.

11.3 Vetor momento angular para sistema com duas partículas



O momento angular total é simplesmente a soma dos momentos angular individuais. Como a descrição é em relação ao centro de massa, vamos já expressar os momentos angular em relação ao centro de massa, que será indicado pelo índice zero.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = m_1.(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{v}_1 - \vec{v}_0) + m_2.(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) \times (\vec{v}_2 - \vec{v}_0)$$

Vamos lembrar que a posição $\vec{r}_0$ do centro de massa é dada por:

$$\vec{r}_0 = \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

E definiremos $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$. Então algumas simplificações poderão ser feitas:

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_0 = \vec{r}_1 - \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.\vec{r}_1 - \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}.\vec{r}$$

$$\vec{r}_2 - \vec{r}_0 = \vec{r}_2 - \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.\vec{r}_2 - \frac{m_1.\vec{r}_1 + m_2.\vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.\vec{r}$$

Para a velocidade temos um análogo, já que a velocidade do centro de massa é:

$$\vec{v}_0 = \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

E considerando $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$, a velocidade relativa de 2 em relação à 1. Então, simplificando, obtemos:

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_0 = \vec{v}_1 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.\vec{v}_1 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}.\vec{v}$$

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_0 = \vec{v}_2 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2}.\vec{v}_2 - \frac{m_1.\vec{v}_1 + m_2.\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.\vec{v}$$

Retornando à expressão do momento angular após estas simplificações:

$$\vec{L} = m_1.\left[-\frac{m_2}{m_1 + m_2}.\vec{r} \right] \times \left[-\frac{m_2}{m_1 + m_2}.\vec{v} \right] + m_2.\left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}.\vec{r} \right] \times \left[\frac{m_1}{m_1 + m_2}.\vec{v} \right]$$

$$\vec{L} = \frac{m_1.m_2^2}{(m_1+m_2)^2}.\vec{r}\times\vec{v} + \frac{m_2.m_1^2}{(m_1+m_2)^2}.\vec{r}\times\vec{v} \Rightarrow \vec{L} = \frac{m_1.m_2^2 + m_2.m_1^2}{(m_1+m_2)^2}.\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{L} = \left[\frac{m_1.m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_1^2.m_2}{(m_1+m_2)^2}\right].\vec{r}\times\vec{v}$$

Definimos a massa reduzida como:

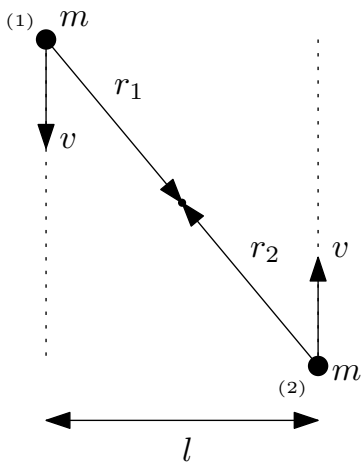
$$\mu = \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}$$

Então:

$$\vec{L} = \left[\frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.\frac{m_2}{m_1+m_2} + \frac{m_1.m_2}{m_1+m_2}.\frac{m_1}{m_1+m_2}\right].\vec{r}\times\vec{v} \Rightarrow \vec{L} = \left[\mu.\frac{m_2}{m_1+m_2} + \mu.\frac{m_1}{m_1+m_2}\right].\vec{r}\times\vec{v}$$

$$\vec{L} = \mu.\frac{m_1+m_2}{m_1+m_2}.\vec{r}\times\vec{v} \Rightarrow \vec{L} = \mu.\vec{r}\times\vec{v}$$

11.4 Patinação no gelo e momento angular



a Vetor momento angular total

O momento angular total é dado pela soma dos vetores de momento angular de cada patinador:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = m.\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m.\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$$

Perceba que o centro de massa não se move, basta calcular a sua velocidade pela equação que já conhecemos. Ao somarmos, vetorialmente, $m.\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m.\vec{r}_2 \times \vec{v}_2$, sempre obteremos um vetor de módulo $m.l.v$, pois $\vec{v}_1 = -\vec{v}_2$ e $\vec{r}_1 = -\vec{r}_2$, assim teremos:

$$\vec{L} = m.\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 + m.\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = 2.m.\vec{r}_1 \times \vec{v}_1$$

Considerando apenas o módulo:

$$L = 2.m.r_1.v.sen(\theta_1) = 2.m.v.(r_1.sen(\theta_1))$$

Perceba que $r_1.sen(\theta_1) = \frac{l}{2}$. Portanto, teremos:

$$L = m.l.v = 60.1, 40.5 = 420\ \frac{Kg.m^2}{s}$$

b Velocidade angular dos patinadores

Após darem as mãos, o momento angular ainda deve ser conservado, ou seja:

$$L = I_{CM}.\omega = 420\ \frac{Kg.m^2}{s} \Rightarrow \omega = \frac{420}{I_{CM}}$$

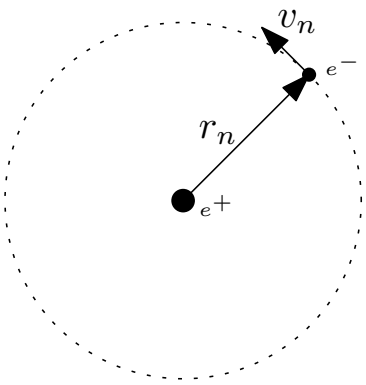
O momento de inércia total pode ser calculado facilmente, já que os patinadores são massas pontuais:

$$I_{CM} = I_{1_{CM}} + I_{2_{CM}} = m.r_1^2 + m.r_2^2 = m.\left[\frac{l}{2}\right]^2 + m.\left[\frac{l}{2}\right]^2 = m.\frac{l^2}{2}$$

Logo, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{420}{m.\frac{l^2}{2}} = \frac{840}{60.1, 40^2} = 7, 1\ \frac{rad}{s}$$

11.5 O átomo de Bohr



a O raio das órbitas

Vamos impor que o módulo do momento angular $\vec{L}$ é quantizado, ou seja:

$$L_n = m_e.v_n.r_n.sen\left(\frac{\pi}{2}\right) = m_e.v_n.r_n = n.\hbar$$

Os índices n na velocidade e raio da órbita indicam que, agora, essas variáveis irão depender explicitamente do valor inteiro que n assume. Pela Segunda Lei de Newton, podemos determinar a velocidade, pois a força eletrostática é central e funcionará como resultante centrípeta:

$$F_r = m.a_r \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_n^2} = m_e.\frac{v_n^2}{r_n} \Rightarrow v_n^2 = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.r_n} \Rightarrow v_n = \sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.r_n}}$$

Substituindo, poderemos isolar r_n e assim ver como os raios de cada órbita são:

$$m_e.\sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.r_n}}.r_n = n.\hbar \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.e^2.m_e.r_n} = n.\hbar \Rightarrow \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.e^2.m_e.r_n = n^2.\hbar^2$$

$$r_n = \frac{4.\pi.\varepsilon_0.\hbar^2}{e^2.m_e}.n^2$$

O raio de Bohr é obtido quando fazemos $n = 1$. Logo, teremos:

$$r_1 = \frac{4.\pi.(8,85.10^{-12}).(1,05.10^{-34})^2}{(1,6.10^{-19})^2.(9,11.10^{-31})}.1^2 = 5,26.10^{-11}\ m = 0,53.10^{-10}\ m = 0,53\ \text{Å}$$

Então podemos escrever r_n como:

$$r_n = n^2.r_1$$

b A energia das órbitas

A energia total do elétron na órbita é a soma de sua energia cinética com sua energia potencial elétrica (já que a órbita é mantida pela atração com o próton). Portanto, teremos:

$$U_n = \frac{1}{2}.m_e.v_n^2 - \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2}.m_e.\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.r_n} - \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_n} - \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_n}$$

Para a órbita $n = 1$, obtemos:

$$U_1 = -\frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{r_1}$$

Queremos o valor em eV, como está, teremos em J. Por isso, dividimos por e:

$$U_1 = -\frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e}{r_1} = -\frac{1}{8.\pi.(8,85.10^{-12})}.\frac{(1,6.10^{-19})}{5,26.10^{-11}} = -13,6\ eV$$

Se substituímos o r_n pela sua expressão, obtemos os valores de energia dependendo explicitamente dos valores n.

$$U_n = -\frac{1}{8.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e}{\frac{4.\pi.\varepsilon_0.\hbar^2}{e^2.m_e}.n^2} = -\frac{1}{n^2}\frac{1}{32.\pi^2.\varepsilon_0^2}.\frac{m_e.e^3}{\hbar^2} = \frac{U_1}{n^2}$$

c Razão entre a velocidade na primeira órbita e a velocidade da luz

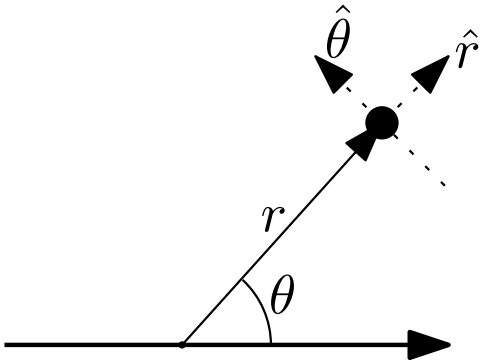
Para a primeira órbita, o valor da velocidade do elétron é:

$$v_1 = \sqrt{\frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{e^2}{m_e.r_1}} = \sqrt{\frac{1}{4.\pi.(8,85.10^{-12})}.\frac{(1,6.10^{-19})^2}{(9,11.10^{-31}).(5,26.10^{-11})}} = 2,19.10^6\ \frac{m}{s}$$

A razão é, portanto:

$$\frac{v_1}{c} = \frac{2,19.10^6}{3.10^8} = 7,3.10^{-3}$$

11.6 Partícula se movendo em campo de forças centrais



a Velocidade em coordenadas polares

A Velocidade da partícula será, obviamente, a soma das velocidades em cada direção. No caso do sistema de coordenadas polares, temos $\hat{r}$ e $\hat{\theta}$.

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta = v_r\ \hat{r} + v_\theta\ \hat{\theta}$$

Partindo da definição da velocidade, obtemos:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$$

Em coordenadas polares, o vetor posição $d\vec{s}$ é:

$$d\vec{s} = d\vec{r} + r.d\vec{\theta} = dr\ \hat{r} + r.d\theta\ \hat{\theta}$$

Substituindo na definição de velocidade, temos:

$$\vec{v} = \frac{dr\ \hat{r} + r.d\theta\ \hat{\theta}}{dt} = \frac{dr}{dt}\ \hat{r} + r.\frac{d\theta}{dt}\ \hat{\theta}$$

Comparando com a primeira expressão mostrada, obtemos o módulo de cada componente:

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad \text{e} \quad v_\theta = r.\frac{d\theta}{dt}$$

Agora podemos verificar o momento angular. Basta substituirmos a velocidade que obtivemos na expressão usada comumente:

$$\vec{L} = m.\vec{r} \times \vec{v} = m.\vec{r} \times (v_r\ \hat{r} + v_\theta\ \hat{\theta}) = m.[v_r.\vec{r} \times \hat{r} + v_\theta.\vec{r} \times \hat{\theta}]$$

Lembre que para vetores paralelos (ou antiparalelos) o produto vetorial é nulo, pois seu módulo é diretamente proporcional ao seno do ângulo entre os vetores.

$$\vec{L} = m.[v_r.\vec{0} + v_\theta.\vec{r} \times \hat{\theta}] = m.v_\theta.\vec{r} \times \hat{\theta}$$

Portanto, o módulo é:

$$L = m.v_\theta.r.sen(90^\circ) = m.r.v_\theta$$

b Energia total da partícula

A energia total é a soma da energia cinética com a energia potencial:

$$E = K + U(r)$$

O potencial ficará como está, pois não temos sua equação. Então teremos que lidar com a energia cinética:

$$K = \frac{1}{2}.m.v^2 = \frac{1}{2}.m.\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}.m.\left[v_r\ \hat{r} + v_\theta\ \hat{\theta}\right]\cdot\left[v_r\ \hat{r} + v_\theta\ \hat{\theta}\right]$$

$$K = \frac{1}{2}.m.\left[v_r^2\ \hat{r}\cdot\hat{r} + v_\theta^2\ \hat{\theta}\cdot\hat{\theta} + v_r.v_\theta\ \hat{r}\cdot\hat{\theta} + v_\theta.v_r\ \hat{\theta}\cdot\hat{r}\right]$$

Como o produto interno é diretamente proporcional ao cosseno do ângulo entre os vetores, quando forem perpendiculares o produto interno é nulo, e é máximo quando os vetores forem paralelos.

$$K = \frac{1}{2}.m.\left[v_r^2 + v_\theta^2\right]$$

Logo, a energia é:

$$E = \frac{1}{2}.m.(v_r^2 + v_\theta^2) + U(r) = \frac{1}{2}.m.v_r^2 + \frac{1}{2}.m.v_\theta^2 + U(r)$$

Perceba que podemos expressar v_θ^2 em função do módulo do momento angular:

$$L = m.r.v_\theta \Rightarrow L^2 = m^2.r^2.v_\theta^2 \Rightarrow v_\theta^2 = \frac{L^2}{m^2.r^2}$$

Substituindo na equação de energia total:

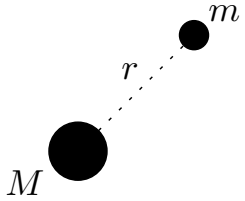
$$E = \frac{1}{2}.m.v_r^2 + \frac{1}{2}.m.\frac{L^2}{m^2.r^2} + U(r) = \frac{1}{2}.m.v_r^2 + \frac{1}{2}.\frac{L^2}{m.r^2} + U(r)$$

Agora só definimos $V_{ef}(r) = \frac{1}{2}.\frac{L^2}{m.r^2} + U(r)$ e chegamos ao resultado desejado:

$$E = \frac{1}{2}.m.v_r^2 + V_{ef}(r)$$

c Potencial efetivo no contexto da Gravitação

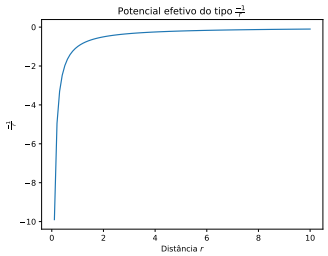
Para o caso gravitacional, o potencial é:



$$U(r) = -\frac{G.M.m}{r}$$

E a velocidade, como já vimos no capítulo anterior, será:

$$v_\theta = \sqrt{\frac{G.M}{r}}$$

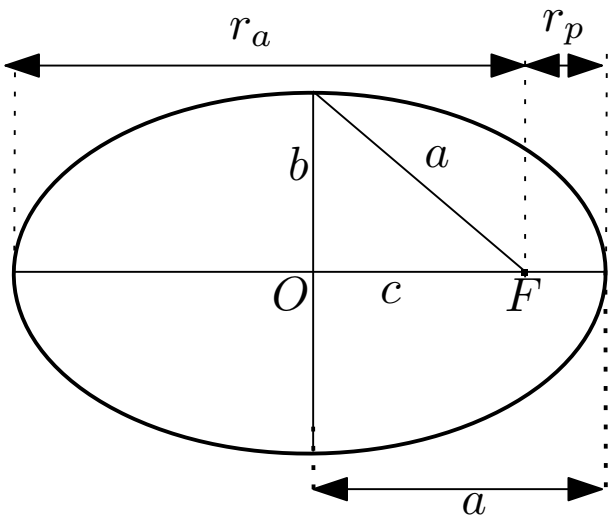


Sendo assim, o potencial efetivo se torna:

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2}.\frac{m^2.r^2.v_\theta^2}{m.r^2} + U(r) = \frac{1}{2}.m.v_\theta^2 + U(r)$$

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2}.m.\frac{G.M}{r} - \frac{G.M.m}{r} = -\frac{1}{2}.\frac{G.m.M}{r}$$

11.7 Aplicando os resultados do Problema anterior



a Mínimo do potencial efetivo e energia associada

Para descobrir o extremo de uma função, derivamos a mesma e igualamos à zero.

$$\frac{d}{dr}V_{ef} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{2}.\frac{L^2}{m.r^2} - \frac{G.m.M}{r}\right] = 0 \Rightarrow -\frac{3}{2}.\frac{L^2}{m.r^3} + \frac{G.m.M}{r^2} = 0$$

$$\frac{3}{2}.\frac{L^2}{m.r} = G.m.M \Rightarrow r = r_0 = \frac{3}{2}.\frac{L^2}{G.m^2.M}$$

Para mostrar que em r_0 temos um mínimo, é necessário derivarmos V_{ef} mais uma vez. Se $V_{ef}(r_0) > 0$, então temos um mínimo.

$$\frac{d^2}{dr^2}V_{ef} = \frac{d}{dr}\left[-\frac{3}{2}.\frac{L^2}{m.r^3} + \frac{G.m.M}{r^2}\right] = \frac{9}{2}.\frac{L^2}{m.r^4} - 2.\frac{G.m.M}{r^3}$$

Substituindo o valor de r_0:

$$\frac{d^2}{dr^2}V_{ef} = \frac{9}{2}.\frac{L^2}{m}.\left[\frac{2.G.m^2.M}{3.L^2}\right]^4 - 2.G.m.M.\left[\frac{2.G.m^2.M}{3.L^2}\right]^3$$

$$\frac{d^2}{dr^2}V_{ef} = \frac{9}{2}.\frac{L^2}{m}.\frac{2^4.G^4.m^8.M^4}{3^4.L^8} - 2.G.m.M.\frac{2^3.G^3.m^6.M^3}{3^3.L^6}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}V_{ef} = \frac{2^3.G^4.m^7.M^4}{3^2.L^6} - \frac{2^4.G^4.m^7.M^4}{3^3.L^6} = \frac{3.2^3.G^4.m^7.M^4}{3^3.L^6} - \frac{2^4.G^4.m^7.M^4}{3^3.L^6}$$

$$\frac{d^2}{dr^2}V_{ef} = \frac{3.2^3.G^4.m^7.M^4 - 2^4.G^4.m^7.M^4}{3^3.L^6} = (3.2^3 - 2^4).\frac{G^4.m^7.M^4}{3^3.L^6} = \frac{8}{27}.\frac{G^4.m^7.M^4}{L^6} > 0$$

Fica assim provado que em r_0 temos um mínimo!

A energia em r_0 pode ser calculada simplesmente substituindo $r \to r_0$ na equação da energia:

$$E_0 = \frac{1}{2}.m.(v_{r_0}^2 + v_\theta^2) + U(r_0) = \frac{1}{2}.m.v^2 + U(r_0)$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton, podemos descobrir v^2:

$$\frac{G.m.M}{r_0^2} = m.\frac{v^2}{r_0} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{G.M}{r_0}}$$

Portanto:

$$E_0 = \frac{1}{2}.m.\frac{G.M}{r_0} - \frac{G.m.M}{r_0} = -\frac{1}{2}.\frac{G.m.M}{r_0}$$

b Energia associada à órbita elíptica

Nos pontos de periélio e afélio, temos pontos em que a velocidade radial v_r é nula, sendo assim:

$$E = V_{ef} \Rightarrow E = \frac{1}{2}.\frac{L^2}{m.r^2} - \frac{G.m.M}{r}$$

Vamos reorganizar a equação:

$$E.m.r^2 = \frac{1}{2}.L^2 - G.m^2.M.r \Rightarrow E.m.r^2 + G.m^2.M.r - \frac{L^2}{2} = 0$$

Obtivemos uma equação do segundo grau, logo podemos aplicar Bháskara. As raízes negativa e positiva serão o periélio e o afélio, respectivamente:

$$r = \frac{-G.m^2.M \pm \sqrt{(G.m^2.M)^2 + 4.E.m.\frac{L^2}{2}}}{2.E.m} = \frac{-G.m^2.M \pm \sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{2.E.m}$$

Sabemos que o raio médio a é a soma dos raios no periélio e afélio divididos por 2. Logo, com a solução da equação quadrática, obtemos:

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{\frac{-G.m^2.M}{2.E.m} + \frac{-G.m^2.M}{2.E.m}}{2} = \frac{-G.m^2.M}{2.E.m} = \frac{-G.m.M}{2.E}$$

Portanto, a anergia é:

$$E = \frac{-G.m.M}{2.a}$$

c Velocidade da partícula em uma órbita elíptica

Como vale a conservação da energia, podemos considerar que a energia total calculada anteriormente é a soma da energia cinética com o potencial gravitacional:

$$\frac{1}{2}.m.v^2 - \frac{G.m.M}{r} = \frac{-G.m.M}{2.a} \Rightarrow \frac{1}{2}.v^2 = \frac{G.M}{r} - \frac{G.M}{2.a} \Rightarrow v^2 = \frac{2.G.M}{r} - \frac{G.M}{a}$$

$$v = \sqrt{\frac{2.G.M}{r} - \frac{G.M}{a}} = \sqrt{G.M.\left[\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right]}$$

d Excentricidade da órbita elíptica

A excentricidade é definida como a razão entre a distância focal e o raio médio:

$$e = \frac{F}{a}$$

Mas sabemos que a distância focal é o raio médio subtraído da distância da massa m ao centro de forças no periélio:

$$e = \frac{a - r_p}{a} = 1 - \frac{r_p}{a}$$

Já obtivemos o valor de r_p na solução da equação quadrática anteriormente:

$$r_p = \frac{-G.m^2.M + \sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{2.E.m}$$

E já vimos também o raio médio:

$$a = \frac{-G.m.M}{2.E}$$

Com isso, obtemos:

$$e = 1 - \frac{\frac{-G.m^2.M + \sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{2.E.m}}{\frac{-G.m.M}{2.E}} = 1 - \left[\frac{-G.m^2.M + \sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{2.E.m}\right].\left[\frac{-2.E}{G.m.M}\right]$$

$$e = 1 + \frac{-G.m^2.M + \sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{G.M.m^2} = 1 - \frac{G.m^2.M}{G.M.m^2} + \frac{\sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{G.M.m^2}$$

$$e = \frac{\sqrt{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}}{G.M.m^2} = \sqrt{\frac{G^2.m^4.M^2 + 2.E.m.L^2}{G^2.M^2.m^4}} = \sqrt{\frac{G^2.m^4.M^2}{G^2.m^4.M^2} + \frac{2.E.m.L^2}{G^2.m^4.M^2}}$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2.E.L^2}{G^2.m^3.M^2}}$$

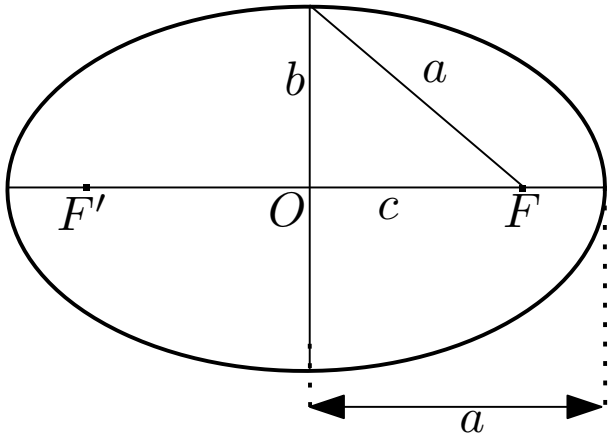
Vamos tentar reescrever o denominador usando a energia associada à órbita:

$$E = \frac{-G.m.M}{2.a} \Rightarrow E^2 = \frac{G^2.m^2.M^2}{4.a^2} \Rightarrow G^2.m^2.M^2 = E^2.4.a^2 \Rightarrow G^2.m^3.M^2 = 4.a^2.m.E^2$$

Assim, chegamos na resposta desejada:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2.E.L^2}{4.a^2.m.E^2}} = \sqrt{1 + \frac{L^2}{2.a^2.m.E}}$$

11.8 Órbita elíptica e as Leis de Kepler



a Momento angular em função da área da elipse

A área varrida em um determinado tempo é diretamente proporcional ao módulo do momento angular:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{l}{2.m}$$

Quando toda a área da elípse for varrida, terão se passado exatamente T (1 período completo). Portanto, obtemos:

$$\frac{d}{dt}A = \frac{A}{T} = \frac{l}{2.m} \Rightarrow l = 2.m.\frac{A}{T}$$

b Obtendo a 3° Lei de Kepler

No problema anterior, obtivemos que a excentricidade da órbita pode ser escrita como:

$$e = \sqrt{1 + \frac{l^2}{2.m.a^2.E}}$$

Considerando um movimento circular, ou seja, excentricidade nula, obtemos:

$$0 = \sqrt{1 + \frac{l^2}{2.m.a^2.E}} \Rightarrow 1 + \frac{l^2}{2.m.a^2.E} = 0 \Rightarrow E = -\frac{l^2}{2.m.a^2}$$

Vimos, também no Problema anterior, que a energia E pode ser escrita como:

$$E = -\frac{G.m.M}{2.a}$$

Substituindo na equação:

$$-\frac{G.m.M}{2.a} = -\frac{l^2}{2.m.a^2} \Rightarrow l^2 = G.m^2.M.a \Rightarrow l = \sqrt{G.m^2.M.a}$$

Podemos igualar esse resultado com o que foi obtido no item anterior:

$$\sqrt{G.m^2.M.a} = 2.m.\frac{A}{T} \Rightarrow \sqrt{G.M.a} = 2.\frac{A}{T} \Rightarrow G.M.a = 4.\frac{A^2}{T^2} \Rightarrow G.M.a = 4.\frac{A^2}{T^2}$$

Como agora temos um círculo, é fácil calcular a área. Chegamos assim no resultado de Kepler:

$$G.M.a = 4.\frac{(\pi.a^2)^2}{T^2} \Rightarrow G.M.a = 4.\frac{\pi^2.a^4}{T^2} \Rightarrow G.M = 4.\frac{\pi^2.a^3}{T^2} \Rightarrow \frac{T^2}{a^3} = \frac{4.\pi^2}{G.M}$$

c O período de Mercúrio

Como a é o raio médio da órbita, temos que ele pode ser obtido pela distância que m está de M no afélio e no periélio:

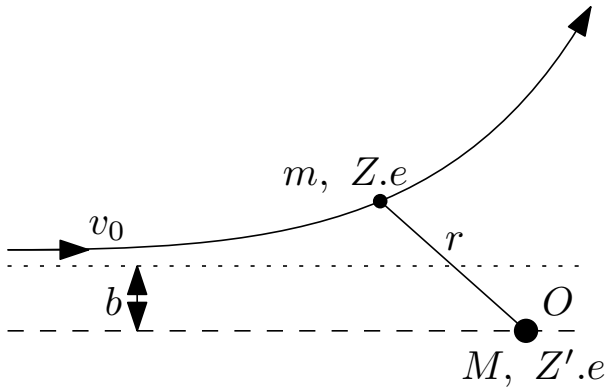
$$a = \frac{d_a + d_p}{2}$$

Portanto, o período é:

$$T^2 = \frac{4.\pi^2}{G.M}.a^3 = \frac{4.\pi^2}{G.M}.\left[\frac{d_a + d_p}{2}\right]^3 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4.\pi^2}{G.M}}.\left[\frac{d_a + d_p}{2}\right]^{\frac{3}{2}} = \frac{2.\pi}{\sqrt{G.M}}.\left[\frac{d_a + d_p}{2}\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$T = \frac{2.\pi}{\sqrt{(6,67.10^{-11}).(1,99.10^{30})}}.\left[\frac{(6,97.10^{10}) + (4,59.10^{10})}{2}\right]^{\frac{3}{2}} = 7,58.10^6 \ s = 88 \ dias$$

11.9 Espalhamento Rutherford



a Potencial efetivo no espalhamento

O potencial efetivo dependerá do potencial eletrostático*:

$$U(r) = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{q_1.q_2}{r} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.e.Z'.e}{r} = \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.Z'.e^2}{r}$$

Então o potencial efetivo é:

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2.m.r^2} + U(r) = \frac{(m.v_0.b)^2}{2.m.r^2} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.Z'.e^2}{r} = \frac{m.v_0^2.b^2}{2.r^2} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.Z'.e^2}{r}$$

b Menor distância entre as partículas

No ponto em que estão mais próximos, teremos $v_r = 0$, ou seja, $E = V_{ef}(r_0)$. Com isso, obtemos:

$$E = V_{ef}(r_0) = \frac{m.v_0^2.b^2}{2.r_0^2} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.Z'.e^2}{r_0}$$

Sabemos que inicialmente há apenas energia cinética. Portanto, por conservação de energia, teremos:

$$\frac{1}{2}.m.v_0^2 = \frac{m.v_0^2.b^2}{2.r_0^2} + \frac{1}{4.\pi.\varepsilon_0}.\frac{Z.Z'.e^2}{r_0} \Rightarrow m.v_0^2.r_0^2 = m.v_0^2.b^2 + \frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0}.r_0$$

$$r_0^2 = b^2 + \frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}.r_0 \Rightarrow r_0^2 - \frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}.r_0 - b^2 = 0$$

Encontramos uma equação do segundo grau para r_0. Aplicando Bháskara, podemos descobrir o valor de r_0:

*Não precisamos nos preocupar com o potencial gravitacional, ele é totalmente desprezível, tendo em vista que estamos lidando com massas muito pequenas (ordem atômica).

$$r_0 = \frac{\frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2} \pm \sqrt{\left[\frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}\right]^2 + 4.b^2}}{2}$$

Como $r_0 > 0$, pegaremos a raiz positiva:

$$r_0 = \frac{\frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2} + \sqrt{\left[\frac{Z.Z'.e^2}{2.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}\right]^2 + 4.b^2}}{2} = \frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2} + \sqrt{\left[\frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2.}\right]^2 + b^2}$$

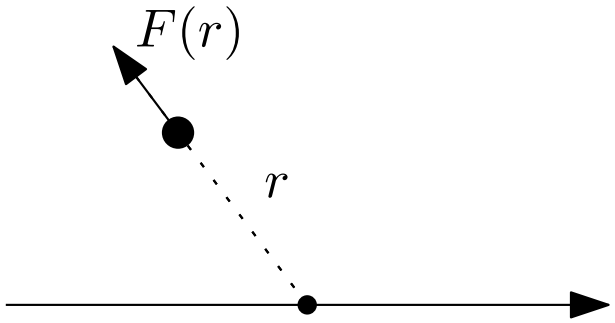
Podemos organizar os termos que estão dentro da raiz quadrada:

$$r_0 = \frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2} + \frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}.\sqrt{1 + b^2.\left[\frac{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}{Z.Z'.e^2}\right]^2}$$

$$r_0 = \frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2} + \frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}.\sqrt{1 + \left[\frac{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}{Z.Z'.e^2}.b\right]^2}$$

$$r_0 = \frac{Z.Z'.e^2}{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}.\left[1 + \sqrt{1 + \left[\frac{4.\pi.\varepsilon_0.m.v_0^2}{Z.Z'.e^2}.b\right]^2}\right]$$

11.10 Partícula se movendo em campo de forças centrais repulsivas



a Potencial efetivo no sistema com força radial repulsiva

Primeiro, precisamos calcular o potencial associado à força $F(r)$. Sabendo que a força deve ser o negativo do gradiente do potencial, obtemos:

$$\vec{F}(r) = -\vec{\nabla}U(r) \Rightarrow \frac{m.A^2}{r^3}\ \hat{r} = -\frac{d}{dr}U(r)\ \hat{r} \Rightarrow dU(r) = -\frac{m.A^2}{r^3}\ dr$$

Integrando, do infinito até uma distância arbitrária r, obtemos:

$$U(r) = -\int_{\infty}^{r} \frac{m.A^2}{r'^3}\ dr' = m.A^2.\int_{r}^{\infty} \frac{1}{r'^3}\ dr' = \frac{1}{2}.\frac{m.A^2}{r^2}$$

Logo, teremos que o potencial efetivo será:

$$V_{ef}(r) = \frac{L^2}{2.m.r^2} + U(r) = \frac{(m.v_0.b)^2}{2.m.r^2} + \frac{1}{2}.\frac{m.A^2}{r^2} = \frac{m.v_0^2.b^2}{2.r^2} + \frac{1}{2}.\frac{m.A^2}{r^2}$$

$$V_{ef}(r) = \frac{m.v_0^2}{2.r^2}.\left[b^2 + \frac{A^2}{v_0^2}\right]$$

b Menor distância entre a partícula e o centro de forças

Na menor distância, a partícula terá velocidade radial nula, ou seja, $E = V_{ef}(r_0)$. Como inicialmente só há energia cinética e a energia total se conserva, teremos:

$$\frac{1}{2}.m.v_0^2 = \frac{m.v_0^2}{2.r_0^2}.\left[b^2 + \frac{A^2}{v_0^2}\right] \Rightarrow r_0 = \sqrt{b^2 + \frac{A^2}{v_0^2}}$$

11.11 Momento angular do pneu de um carro fazendo curva

O momento angular interno é o associado à rotação do pneu, que depende do seu momento de inércia:

$$L_{int} = I_{int}.\omega = I.\frac{v}{a}$$

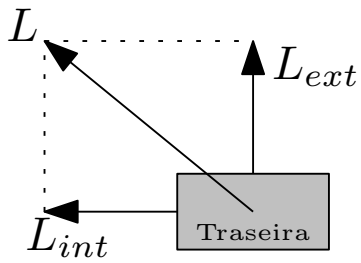
Pela regra da mão direita, o vetor aponta para o centro da curva.

Já o momento angular externo diz respeito ao movimento de rotação do carro, como podemos considerá-lo como uma massa pontual, sabemos que seu momento de inércia é $M.R^2$:

$$L_{ext} = I_{ext}.\omega = M.R^2.\frac{v}{R} = M.R.v$$

Também pela regra da mão direita, o vetor aponta para cima, perpendicular ao movimento na pista.

O módulo do momento angular total do pneu será:

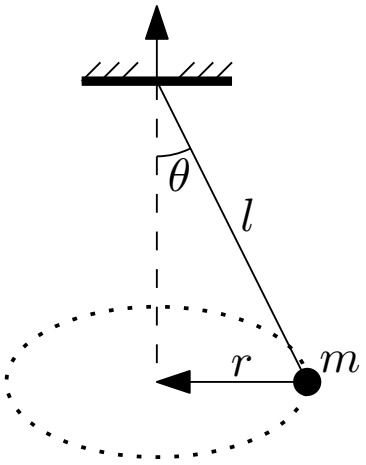


$$L^2 = L_{int}^2 + L_{ext}^2 = \left[I.\frac{v}{a}\right]^2 + [M.R.v]^2 = \frac{I^2.v^2}{a^2} + M^2.R^2.v^2$$

$$L = v.\sqrt{\frac{I^2}{a^2} + M^2.R^2}$$

Considerando a soma vetorial, o vetor resultante forma um cone com base no plano da pista.

11.12 Pêndulo cônico



a Variação do comprimento do fio

Aplicando a Segunda Lei de Newton na horizontal e vertical, obtemos, respectivamente:

$$F_x = m.a_x \Rightarrow T.sen(\theta) = m.\frac{v^2}{l}$$

$$F_y = 0 \Rightarrow T.cos(\theta) - m.g = 0 \Rightarrow T.cos(\theta) = m.g$$

Juntando os resultados, obtemos:

$$\frac{m.g}{cos(\theta)}.sen(\theta) = m.\frac{v^2}{r} \Rightarrow g.tg(\theta) = \frac{v^2}{r} \Rightarrow v = \sqrt{g.r.tg(\theta)}$$

A grandeza que se conserva independentemente do fio ser puxado ou não é o momento angular. Logo:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m.v_1.r_1 = m.v_2.r_2 \Rightarrow v_1.r_1 = v_2.r_2 \Rightarrow \sqrt{g.r_1.tg(\theta_1)}.r_1 = \sqrt{g.r_2.tg(\theta_2)}.r_2$$

$$g.r_1.tg(\theta_1).r_1^2 = g.r_2.tg(\theta_2).r_2^2 \Rightarrow r_1^3.tg(\theta_1) = r_2^3.tg(\theta_2) \Rightarrow r_2^3 = \frac{tg(\theta_1)}{tg(\theta_2)}.r_1^3 \Rightarrow r_2 = \sqrt[3]{\frac{tg(\theta_1)}{tg(\theta_2)}}.r_1$$

substituindo os valores:

$$r_2 = \sqrt[3]{\frac{tg(30^\circ)}{tg(60^\circ)}}.0,5 = 0,35\ m$$

Perceba que r_2 não é o comprimento final de fio, mas sim o comprimento final do raio da circunferência descrita pelo pêndulo. O comprimento do fio é:

$$sen(\theta) = \frac{r}{l} \Rightarrow l = \frac{r}{sen(\theta)}$$

Queremos a variação do comprimento do fio, portanto:

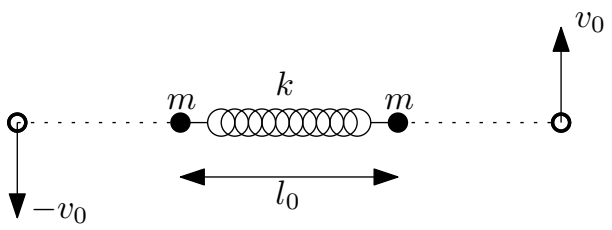
$$\Delta l = l_1 - l_2 = \frac{r_1}{sen(\theta_1)} - \frac{r_2}{sen(\theta_2)} = \frac{0,5}{sen(30^\circ)} - \frac{0,35}{sen(60^\circ)} = 0,6\ m$$

b Fator de variação da velocidade de rotação

Vamos simplesmente calcular a razão entre as velocidades:

$$\kappa = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{g.r_2.tg(\theta_2)}}{\sqrt{g.r_1.tg(\theta_1)}} = \sqrt{\frac{r_2.tg(\theta_2)}{r_1.tg(\theta_1)}} = \sqrt{\frac{0,35.tg(60^\circ)}{0,5.tg(30^\circ)}} \Rightarrow \kappa = 1,4$$

11.13 Sistema de massas ligadas por molas



Primeiramente, vamos lidar com a velocidade v_θ. Por conservação de momento angular angular, podemos obter a velocidade final na direção θ:

$$L_i = L_f \Rightarrow m.v_0.\frac{2.l_0}{2} + m.v_0.\frac{2.l_0}{2} = m.v_\theta.\frac{l_0}{2} + m.v_\theta.\frac{l_0}{2} \Rightarrow 2.m.v_0.l_0 = m.v_\theta.l_0 \Rightarrow v_\theta = 2.v_0$$

Agora podemos ir à velocidade radial final. A energia total do sistema deve se conservar, sendo que inicialmente temos:

$$E_i = 2.\frac{1}{2}.m.v_0^2 + \frac{1}{2}.k.(2.l_0 - l_0)^2 = m.v_0^2 + \frac{1}{2}.k.l_0^2$$

No final, teremos apenas energia cinética, não mais energia potencial elástica:

$$E_f = 2.\frac{1}{2}.m.(v_\theta^2 + v_r^2) = m.v_\theta^2 + m.v_r^2 = 4.m.v_0^2 + m.v_r^2$$

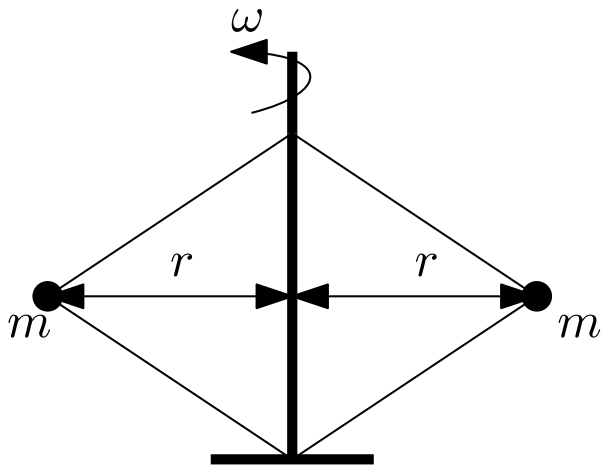
Por conservação da energia, $E_i = E_f$:

$$m.v_0^2 + \frac{1}{2}.k.l_0^2 = 4.m.v_0^2 + m.v_r^2 \Rightarrow \frac{1}{2}.k.l_0^2 = 3.m.v_0^2 + 2.m.v_r^2 \Rightarrow k.l_0^2 = 6.m.v_0^2 + 2.m.v_r^2$$

O enunciado nos diz que $k.l_0^2 = 6.m.v_0^2$. Portanto:

$$2.m.v_r^2 = 0 \Rightarrow v_r = 0$$

11.14 Regulador centrífugo



a Velocidade angular final

Como o sistema não tem forças dissipativas, vale a conservação do momento angular:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow m.v_1.r_1 + m.v_1.r_1 = m.v_2.r_2 + m.v_2.r_2$$

$$2.m.v_1.r_1 = 2.m.v_2.r_2 \Rightarrow v_1.r_1 = v_2.r_2$$

Lembre do nosso vínculo geométrico entre rotação e translação: $v = \omega.r$. Portanto:

$$(\omega_1.r_1).r_1 = (\omega_2.r_2).r_2 \Rightarrow \omega_1.r_1^2 = \omega_2.r_2^2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2}.\omega_1 = \frac{15^2}{25^2}.6 = 2,16\ \frac{rad}{s}$$

b Trabalho realizado sobre o sistema

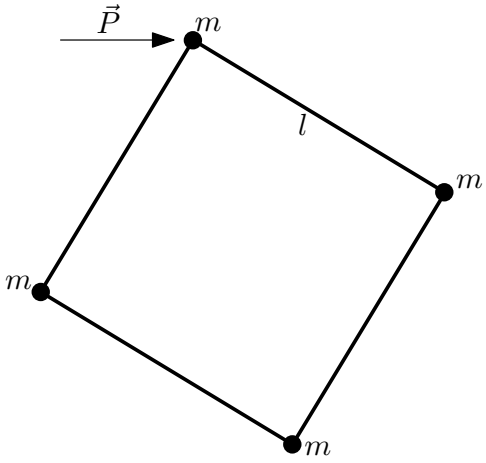
Como vimos nos capítulos referentes à energia, o trabalho total será igual a variação da energia cinética pelo Teorema do Trabalho-Energia cinética:

$$W = \Delta K = K_f - K_i = \left[\frac{1}{2}.I_2.\omega_2^2 + \frac{1}{2}.I_2.\omega_2^2\right] - \left[\frac{1}{2}.I_1.\omega_1^2 + \frac{1}{2}.I_1.\omega_1^2\right] = I_2.\omega_2^2 - I_1.\omega_1^2$$

Como o momento inércia para massas pontuais é $m.r^2$, obtemos:

$$W = m.r_2^2.\omega_2^2 - m.r_1^2.\omega_1^2 = m.(r_2^2.\omega_2^2 - r_1^2.\omega_1^2) = 0,2.(0,25^2.2,16^2 - 0,15^2.6^2) = -0,104\ J$$

11.15 Discos ocupando vértice de um quadrado



Pelo Teorema do Impulso-Momento linear, podemos descobrir a velocidade do centro de massa do sistema:

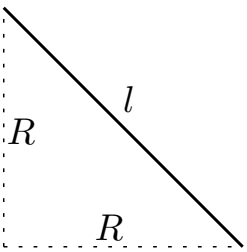
$$J = \Delta p = p_f - p_i$$

Inicialmente, o sistema está em repouso, ou seja, momento linear nulo.

$$J = p_f = 4.m.v_{CM} \Rightarrow v_{CM} = \frac{J}{4.m} = \frac{P}{4.m}$$

Como o impulso foi aplicado à uma distância R do centro de massa, isso fará com que o sistema gire. Podemos calcular a velocidade angular considerando o vínculo geométrico:

$$v_{CM} = \omega.R \Rightarrow \omega = \frac{v_{CM}}{R}$$



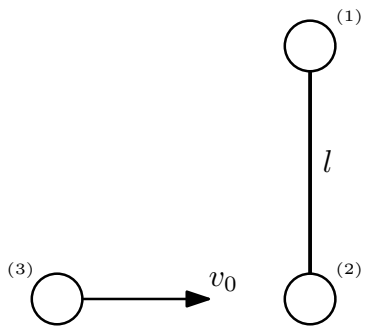
Por Pitágoras, podemos descobrir R:

$$l^2 = R^2 + R^2 = 2.R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{l^2}{2} \Rightarrow R = \frac{l}{\sqrt{2}}$$

Portanto, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{\frac{P}{4.m}}{\frac{l}{\sqrt{2}}} = \frac{P}{4.m}.\frac{\sqrt{2}}{l} = \frac{1}{2.\sqrt{2}}.\frac{P}{m.l}$$

11.16 Movimento de um haltere após colisão



Como a soma das forças externas é nula, a velocidade do centro de massa se conserva, ou seja, podemos calculá-la antes da colisão:

$$v_{CM} = \frac{m_1.v_1 + m_2.v_2 + m_3.v_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m.0 + m.0 + m.v_0}{m + m + m} = \frac{m}{3.m}.v_0 = \frac{3}{3} \Rightarrow v_{CM} = 1\frac{m}{s}$$

Como essa equação tem validade vetorial, podemos afirmar que $\vec{v}_{CM} \parallel \vec{v}_3 = \vec{v}_0$, o que significa que apontam na mesma direção (e terão também mesmo sentido!).

Após a colisão, a posição vertical do centro de massa será:

$$y_{CM} = \frac{m_1.y_1 + (m_2 + m_3).y_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m.0 + (m + m).0,3}{m + m + m} = \frac{2.m.0,3}{3.m} = 0,2\ m$$

Portanto, o centro de massa está a 10 cm da massa m_2.

E, por conservação do momento angular, podemos determinar a velocidade angular do sistema após a colisão. Inicialmente, imediatamente antes da colisão, temos:

$$L_i = m_3.v_3.r_3 = m.v_0.\frac{l}{3}$$

Temos que considerar o centro de massa já em sua posição final, mesmo que antes da colisão ele não esteja ali! Isso para que a conservação do momento angular seja válida.

E no final, podemos escrever o momento angular em função da velocidade angular e do momento de inércia resultante:

$$L_f = I_{CM}.\omega$$

O momento de inércia total será a soma dos momentos de inércia individuais:

$$I_{CM} = m_1.l_1^2 + (m_2 + m_3).l_{2/3}^2 = m.\left[\frac{2.l}{3}\right]^2 + 2.m.\left[\frac{l}{3}\right]^2 = \frac{4}{9}.m.l^2 + \frac{2}{9}.ml^2 \Rightarrow I_{CM} = \frac{2}{3}.m.l^2$$

Considerando a conservação, obtemos:

$$L_i = L_f \Rightarrow m.v_0.\frac{l}{3} = \frac{2}{3}.m.l^2.\omega \Rightarrow \frac{v_0}{3} = \frac{2}{3}.l.\omega \Rightarrow \omega = \frac{v_0}{2.l} = \frac{3}{2.0,3} = 5\ \frac{rad}{s}$$

CAPÍTULO

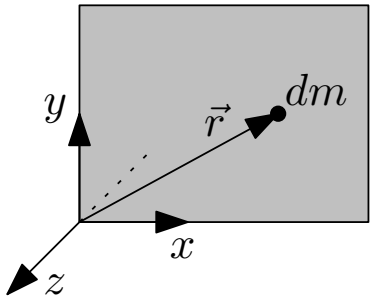
12

DINÂMICA DE CORPOS RÍGIDOS

"A realidade última não é matéria nem espírito, mas informação. Tudo o que existe pode ser reduzido a relações matemáticas e padrões de organização."

Max Tegmark

12.1 Teorema dos eixos perpendiculares



Partindo da definição, o momento de inércia em relação ao eixo z é:

$$I_z = \int r^2 \, dm = \int (x^2 + y^2) \, dm = \int x^2 \, dm + \int y^2 \, dm$$

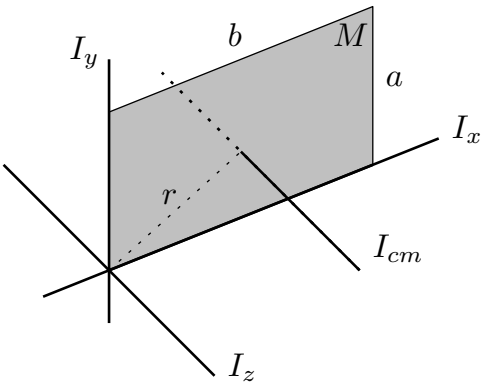
Observe que:

$$I_y = \int x^2 \, dm \text{ e } I_x = \int y^2 \, dm$$

Portanto, obtemos:

$$I_z = I_x + I_y$$

12.2 Aplicando o Teorema dos eixos perpendiculares



a Momento de inércia de placa com eixo de rotação no centro de massa

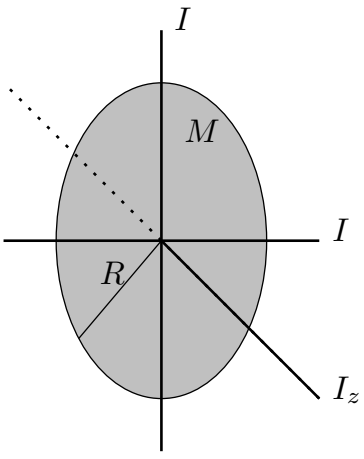
Pelo Teorema dos eixos perpendiculares, teremos:

$$I_z = I_x + I_y = \frac{1}{3}.M.a^2 + \frac{1}{3}.M.b^2 = \frac{1}{3}.M.(a^2 + b^2)$$

Porém, queremos o eixo de rotação no centro de massa, e não no vértice da placa, mas sim no centro de massa. Portanto, agora podemos aplicar o teorema dos eixos paralelos:

$$I_z = I_{cm} + M.r^2 \Rightarrow I_{cm} = I_z - M.r^2 = \frac{1}{3}.M.(a^2 + b^2) - M.\left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

$$I_{cm} = \frac{1}{3}.M.(a^2 + b^2) - \frac{1}{4}.M.(a^2 + b^2) = \frac{1}{12}.M.(a^2 + b^2)$$



b Momento de inércia de círculo com eixo de rotação em seu diâmetro

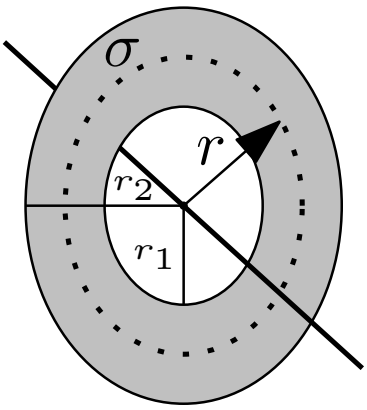
Pelo Teorema dos eixos perpendiculares, obtemos algo interessante. Por conta da simetria circular, os momentos de inércia em x e y são iguais:

$$I_z = I_x + I_y = 2.I \Rightarrow I = \frac{I_z}{2}$$

Portanto, o momento de inércia em relação à esse eixo de rotação é:

$$I = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.M.R^2 = \frac{1}{4}.M.R^2$$

12.3 Momento de inércia de lâmina homogênea em formato de anel



a Em relação ao eixo perpendicular ao plano do anel

Pela definição do momento de inércia:

$$I_z = \int r^2 \, dm$$

Podemos expressar a massa dm em função da densidade superficial do anel:

$$\sigma = \frac{M}{A} = \frac{dM}{dA} \Rightarrow dM = \frac{M}{A}.dA = \frac{M}{\pi.(r_2^2 - r_1^2)}.dA = \frac{M}{\pi.(r_2^2 - r_1^2)}.(2.\pi.r.dr) \Rightarrow dM = \frac{2.M}{r_2^2 - r_1^2}.r.dr$$

Substituindo na equação do momento de inércia:

$$I_z = \int r^2.\frac{2.M}{r_2^2 - r_1^2}.r \; dr = \frac{2.M}{r_2^2 - r_1^2}.\int r^3 \; dr$$

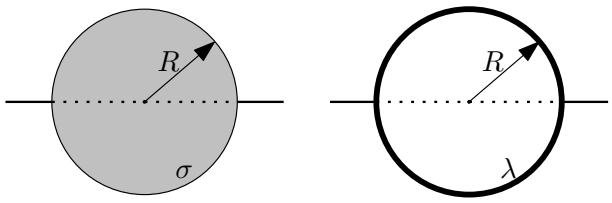
Como so há massa entre r_1 e r_2, esses serão nossos limites de integração:

$$I_z = \frac{2.M}{r_2^2 - r_1^2}.\int_{r_1}^{r_2} r^3 \; dr = \frac{2.M}{r_2^2 - r_1^2}.\left(\frac{r_2^4 - r_1^4}{4}\right) = \frac{M}{2.(r_2^2 - r_1^2)}.(r_2^4 - r_1^4)$$

Vamos escrever $r_2^4 - r_1^4$ como $(r_2^2 - r_1^2).(r_2^2 + r_1^2)$, assim obtemos:

$$I_z = \frac{M}{2.(r_2^2 - r_1^2)}.(r_2^2 - r_1^2).(r_2^2 + r_1^2) \Rightarrow I_z = \frac{M}{2}.(r_2^2 + r_1^2)$$

b Eixo paralelo ao diâmetro do anel



Pelo Teorema dos eixos perpendiculares:

$$I_z = I_x + I_y$$

Por conta da simetria circular, temos que $I_x = I_y$. Portanto, teremos:

$$I_x = I_y = \frac{I_z}{2} = \frac{M}{4}.(r_2^2 + r_1^2)$$

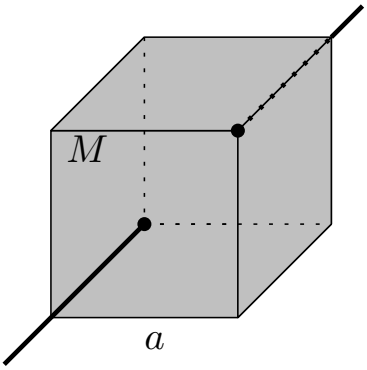
Para um disco, teremos $r_1 \to 0$ e $r_2 \to R$:

$$I_x = \frac{M}{4}.(R^2 + 0^2) \Rightarrow I_x = \frac{M}{4}.R^2$$

No caso de um aro circular, teremos $r_1 = r_2 = R$:

$$I_x = \frac{M}{4}.(R^2 + R^2) = I_x = \frac{M}{42}.R^2$$

12.4 Momento de inércia de um cubo

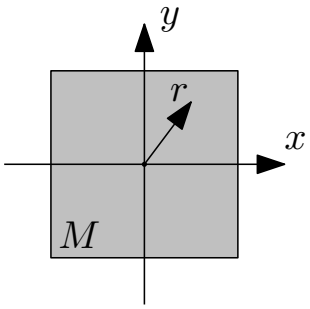


Lembre que a distribuição paralela ao eixo de rotação pouco importa ao momento inércia, então o problema que inicialmente é tridimensional pode ser reduzido para um bidimensional.
Com isso, o momento de inércia será:

$$I_z = \int r^2 \, dm = \int (x^2 + y^2) \, dm = \int x^2 \, dm + \int y^2 \, dm$$

Podemos escrever a massa dm em função da densidade superficial da placa (que, na verdade, é um cubo).

$$\sigma = \frac{M}{a^2} = \frac{dm}{dA} \Rightarrow dm = \frac{M}{a^2}.dA$$



A área dA será escrita convenientemente para cada integral. No geral, podemos escrever:

$$dA = d(a.2.x) = 2.a.dx$$

O 2 surge por conta que nosso eixo de coordenadas está localizado no centro do quadrado, ou seja, a base do quadrado será $2.x$.

Obviamente, vale o mesmo para o y. Então, a massa é:

$$dm = \frac{M}{a^2}.2.a.dx = 2.\frac{M}{a}.dx$$

Portanto, voltando à integral:

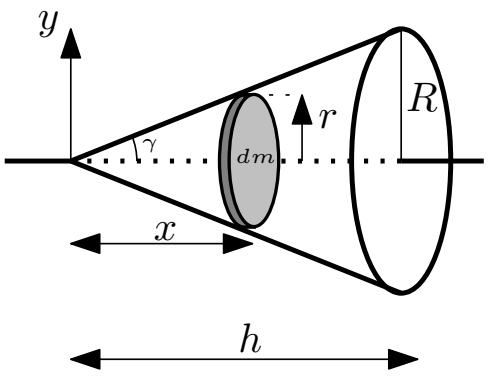
$$I_z = \int x^2.2.\frac{M}{a} \, dx + \int y^2.2.\frac{M}{a} \, dy = 2.\frac{M}{a}.\int x^2 \, dx + 2.\frac{M}{a}.\int y^2 \, dy$$

Novamente, por conta da localização da origem do nosso eixo de coordenadas, repare que a integração deve ser feita de 0 à $\frac{a}{2}$:

$$I_z = 2.\frac{M}{a}.\int_0^{a/2} x^2 \, dx + 2.\frac{M}{a}.\int_0^{a/2} y^2 \, dy = 2.\frac{M}{a}.\frac{1}{3}.\left[\frac{a}{2}\right]^3 + 2.\frac{M}{a}.\frac{1}{3}.\left[\frac{a}{2}\right]^3$$

$$I_z = 4.\frac{M}{a}.\frac{1}{3}.\left[\frac{a}{2}\right]^3 = \frac{M.a^2}{3.2} = \frac{M.a^2}{6}$$

12.5 Momento de inércia de um cone



Podemos enxergar o cone como sendo uma junção de discos. Considerando o eixo de rotação passando pelo eixo do cone, o momento de inércia de cada disco é:

$$I_x = \frac{1}{2}.m.r^2$$

Isso vale para um disco "grande", de massa m. Mas queremos considerar o disco mais fino possível, ou seja, pegaremos um disco de massa dm e, consequentemente, momento de inércia dI:

$$dI_x = \frac{1}{2}.r^2.dm$$

Podemos expressar a massa dm de cada disco com base na densidade volumétrica*:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{dm}{dV} \Rightarrow dm = \frac{M}{V}.dV = \frac{M}{\frac{1}{3}.\pi.R^2.h}.dV$$

O volume dV é o volume do disco de raio r e largura dx, ou seja, é um cilindro infinitesimal:

$$dm = \frac{M}{\frac{1}{3}.\pi.R^2.h}.(\pi.r^2.dx) = 3.M.\frac{r^2}{R^2.h}.dx$$

Como está, teríamos que integrar em x, mas sabemos que na integral do momento de inércia já temos um r^2, então é conveniente tentar trocar $dx \to dr$. Aplicando a tangente do ângulo de abertura do cone, obtemos:

$$tg(\gamma) = \frac{R}{h} = \frac{r}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{R}.r \Rightarrow dx = \frac{h}{R}.dr$$

Finalmente, a massa do disco infinitesimal é:

$$dm = 3.M.\frac{r^2}{R^2.h}.\frac{h}{R}.dr = 3.M.\frac{r^2}{R^3}.dr$$

Substituindo na equação do momento de inércia:

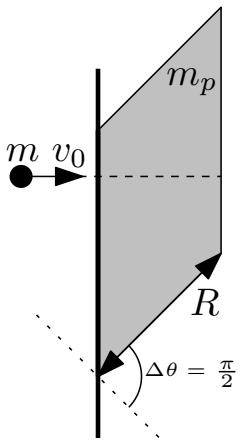
$$dI_x = \frac{1}{2}.r^2.3.M.\frac{r^2}{R^3}.dr = \frac{3.M}{2.R^3}.r^4.dr$$

A integral deve ser feita de 0 à R, que é o raio da base do cone:

$$I_x = \int_0^R \frac{3.M}{2.R^3}.r^4.dr = \frac{3.M}{2.R^3}.\int_0^R r^4.dr = \frac{3.M}{2.R^3}.\frac{R^5}{5} = \frac{3}{10}.M.R^2$$

*Lembre que o volume do cone é $\frac{1}{3}.\pi.R^2.h$.

12.6 Tempo para uma porta fechar



A energia cinética de translação da massa é convertida em energia cinética de rotação e translação do conjunto após a colisão.

$$\frac{1}{2}.m.v_0^2 = \frac{1}{2}.(m+m_p).v^2 + \frac{1}{2}.(I+I_p).\omega^2$$

$$m.v_0^2 = (m+m_p).v^2 + (I+I_p).\omega^2$$

Vamos usar o vínculo geométrico de que $v = \omega.R$. Obtemos:

$$m.v_0^2 = (m+m_p).\omega^2.R^2 + (I+I_p).\omega^2 = \omega^2.[(m+m_p).R^2 + (I+I_p)]$$

$$\omega^2 = \frac{m.v_0^2}{(m+m_p).R^2 + (I+I_p)}$$

Lembre que o momento de inércia de uma placa com eixo de rotação lateral é:

$$I_p = \frac{1}{3}.m_p.R^2$$

E o momento de inércia da partícula é simples, pois é pontual, $I = m.R^2$. Então a velocidade angular é:

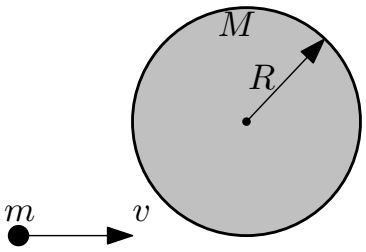
$$\omega^2 = \frac{m.v_0^2}{(m+m_p).R^2 + (m.R^2 + \frac{1}{3}.m_p.R^2)} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{m}{m+m_p+m+\frac{1}{3}.m_p}}.\frac{v_0}{R}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{m}{2.m+\frac{4}{3}.m_p}}.\frac{v_0}{R} = \sqrt{\frac{1}{2.1+\frac{4}{3}.15}}.\frac{2,5}{0,7} = 0,76\ \frac{rad}{s}$$

Pela definição de velocidade angular podemos encontrar o tempo para que a porta desloque os 90° para fechar:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta\theta}{\omega} = \frac{\pi}{2.0,76} = 2,1\ s$$

12.7 O xerife e a mesa giratória



a Velocidade angular da mesa

Dessa vez, vamos aplicar a conservação do momento angular. Inicialmente, instantaneamente antes da colisão, temos $m.v.R$ e após, teremos $I.\omega$, sendo I o momento de inércia total.

$$m.v.R = I.\omega \Rightarrow \omega = \frac{m.v.R}{I}$$

O momento de inércia total é:

$$I = I_{mesa} + I_{bala} = \frac{1}{2}.M.R^2 + m.R^2 = \left[\frac{1}{2}.M + m\right].R^2 \approx \frac{1}{2}.M.R^2$$

Portanto, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{m.v.R}{\frac{1}{2}.M.R^2} = \frac{2.m.v}{M.R}$$

b Fração da energia cinética que foi dissipada

Inicialmente, a energia cinética é:

$$E_i = \frac{1}{2}.m.v^2$$

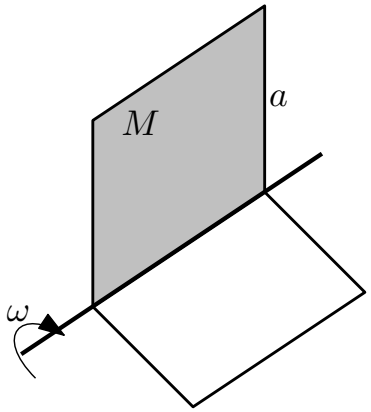
No final, temos:

$$E_f = \frac{1}{2}.I.\omega^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.M.R^2.\left[\frac{2.m.v}{M.R}\right]^2 = \frac{m^2}{M}.v^2$$

Então, a fração perdida é:

$$\kappa = \frac{E_i - E_f}{E_i} = 1 - \frac{E_f}{E_i} = 1 - \frac{\frac{m^2}{M}.v^2}{\frac{1}{2}.m.v^2} = 1 - \frac{2.m}{M}$$

12.8 Movimento de um alçapão



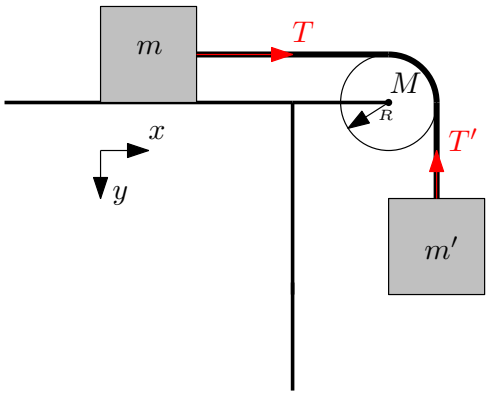
Como o alçapão tem massa homogênea, inicialmente o seu centro de massa está em $h = \frac{a}{2}$. Como não há dissipação de energia, vale a conservação de energia:

$$M.g.h = \frac{1}{2}.I.\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2.M.g.h}{I}}$$

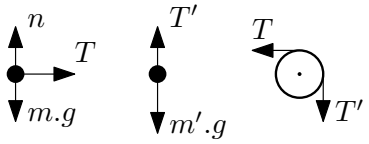
O momento de inércia da placa, com este eixo de rotação é $I = \frac{1}{3}.M.a^2$

$$\omega = \sqrt{\frac{2.M.g.\frac{a}{2}}{\frac{1}{3}.M.a^2}} = \sqrt{\frac{3.g}{a}}$$

12.9 Massas ligadas por polia em plano



Vamos fazer o diagrama de corpo livre de cada componente do sistema. Para as massa m e m', e para a roldana teremos, respectivamente:



a Aceleração linear das massas

Aplicando a Segunda Lei de Newton para cada um, na ordem dos diagramas de corpo livre:

$$T = m.a$$

$$m'.g - T' = m'.a$$

$$F.R = (T' - T).R = I.\alpha$$

Somando as duas primeiras equações, obtemos:

$$T + m'.g - T' = m'.a + m.a \Rightarrow T - T' = m'.a + m.a - m'.g \Rightarrow T' - T = m'.g - m'.a - m.a$$

Como a polia é um cilindro, o momento de inércia é $\frac{1}{2}.M.R^2$. Então substituindo os resultados na equação da polia:

$$(m'.g - m'.a - m.a).R = \frac{1}{2}.M.R^2.\alpha \Rightarrow m'.g - m'.a - m.a = \frac{1}{2}.M.R.\alpha$$

Usando o vínculo geométrico $a = \alpha.R$:

$$m'.g - m'.a - m.a = \frac{M}{2}.a \Rightarrow m'.g = \frac{M}{2}.a + m'.a + m.a = \left[\frac{M}{2} + m' + m\right].a$$

$$a = \frac{m'}{\frac{M}{2} + m' + m}.g$$

b Tensão em cada parte do fio

Só temos que substituir a aceleração que obtivemos em cada equação para obter as tensões. Começando pela tensão que puxa m:

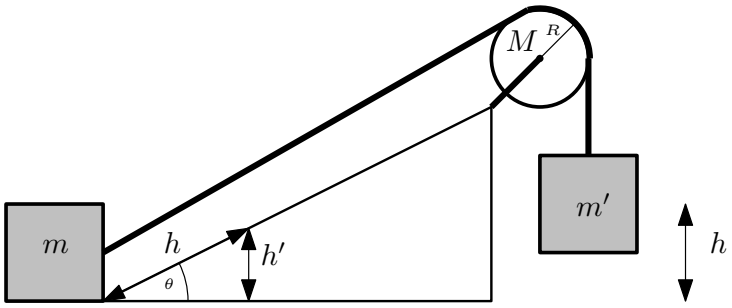
$$T = m.\frac{m'}{\frac{M}{2}+m'+m}.g = \frac{m'.m.g}{\frac{M}{2}+m'+m}$$

A tensão que atua sobre m' é, consequentemente:

$$m'.g - T' = m'.a \Rightarrow T' = m'.g - m'.a = m'.g - \frac{m'^2.g}{\frac{M}{2}+m'+m} = \frac{m'.g.\left[\frac{M}{2}+m'+m\right] - m'^2.g}{\frac{M}{2}+m'+m}$$

$$T' = \frac{m'.g.\left[\frac{M}{2}+m\right] + m'^2.g - m'^2.g}{\frac{M}{2}+m'+m} = \frac{m'.g.\left[\frac{M}{2}+m\right]}{\frac{M}{2}+m'+m}$$

12.10 Massas ligadas por polia em plano inclinado



Inicialmente, a energia do sistema é apenas a potencial gravitacional associada à massa m'. Após isso, teremos a massa m em uma altura h' e as massas e a polia em movimento. Aplicando a conservação de energia, obtemos:

$$m'.g.h = m.g.h' + \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.m'.v^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2$$

As velocidades são iguais porquê as massas estão ligadas por um fio. Podemos usar o vínculo geométrico para substituir a velocidade angular, e lembre que o momento de inércia da polia é $\frac{1}{2}.M.R^2$.

$$m'.g.h = m.g.h' + \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.m'.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.M.R^2.\frac{v^2}{R^2} = m.g.h' + \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.m'.v^2 + \frac{1}{4}.M.v^2$$

$$m'.g.h - m.g.h' = \left[\frac{m}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{M}{4}\right].v^2$$

O tanto que a massa m' desce é a mesma distância percorrida pela massa m no plano inclinado. Aplicando o seno do ângulo de inclinação, obtemos:

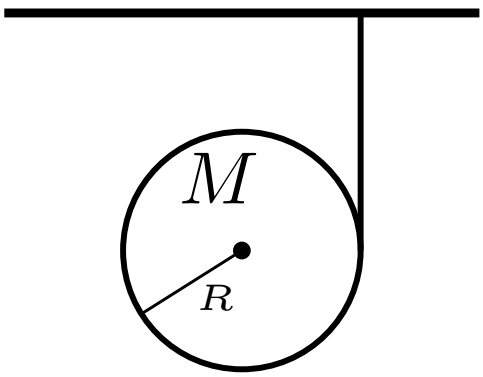
$$sen(\theta) = \frac{h'}{h} \Rightarrow h' = h.sen(\theta)$$

Substituindo na equação de conservação:

$$m'.g.h - m.g.h.sen(\theta) = \left[\frac{m}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{M}{4}\right].v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m'.g.h - m.g.h.sen(\theta)}{\frac{m}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{M}{4}}}$$

$$v = \sqrt{\frac{m' - m.sen(\theta)}{\frac{m}{2} + \frac{m'}{2} + \frac{M}{4}}.g.h} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{m' - m.sen(\theta)}{m + m' + \frac{M}{2}}.2.g.h}$$

12.11 Estojo amarrado com fita no teto



a Aceleração linear do estojo

Vamos aplicar a Segunda Lei de Newton da rotação e da translação, respectivamente. Os resultados são:

$$\sum \tau_z = I.\alpha \Rightarrow T.R = I.\alpha$$

$$\sum F_y = M.a \Rightarrow M.g - T = M.a$$

Vamos lidar com a equação da rotação primeiro. Perceba que o estojo gira em torno do seu eixo (eixo do cilindro), logo seu momento de inércia é $\frac{1}{2}.M.R^2$.

Usando ainda o vínculo geométrico $a = \alpha.R$, obtemos a tensão em função da aceleração:

$$T.R = \frac{1}{2}.M.R^2.\frac{a}{R} \Rightarrow T = \frac{1}{2}.M.a$$

Substituindo na equação de translação, podemos isolar a aceleração linear:

$$M.g - \frac{1}{2}.M.a = M.a \Rightarrow M.g = M.a + \frac{1}{2}.M.a = \frac{3}{2}.M.a \Rightarrow a = \frac{2}{3}.g$$

b A tensão na corda

Basta substituirmos a aceleração encontrada em qualquer das equações de movimento. Substituindo na da tensão encontrada a partir da equação da rotação, obtemos

$$T = \frac{1}{2}.M.\frac{2}{3}.g = \frac{M.g}{3}$$

c Velocidade linear do estojo após desenrolar um comprimento s da fita

Inicialmente, teremos apenas energia potencial gravitacional, referente à altura s. Após, teremos toda a energia sendo convertida em energia de translação e rotação. Aplicando a conservação de energia, obtemos:

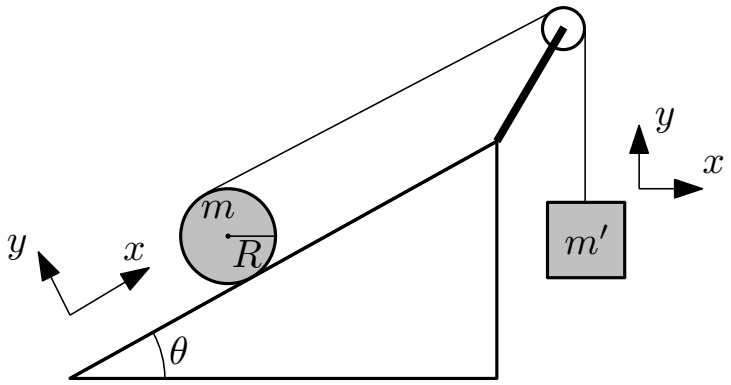
$$M.g.h = M.g.s = \frac{1}{2}.M.v^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2$$

A velocidade angular pode ser substituída pela velocidade linear usando o vínculo geométrico: $v = \omega.R$. E podemos também substituir o momento de inércia:

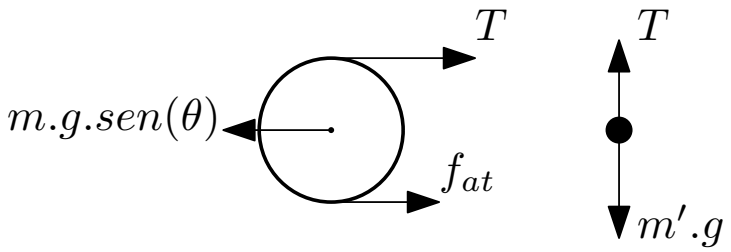
$$M.g.s = \frac{1}{2}.M.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.M.R^2.\left(\frac{v}{R}\right)^2 \Rightarrow g.s = \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{4}.v^2 = \frac{6}{8}.v^2$$

$$v^2 = \frac{8}{6}.g.s = \frac{4}{3}.g.s = 2.\frac{2.g}{3}.s = 2.a.s \Rightarrow v = \sqrt{2.a.s}$$

12.12 Disco circular sobre plano inclinado



Vamos fazer o diagrama de corpo livre para cada corpo, considerando que a massa m' está descendo[†].



a Aceleração da massa m'

Aplicando a Segunda Lei de Newton da translação para o bloco e a Segunda Lei de Newton da translação e rotação para o disco, respectivamente, obtemos:

$$T - m'.g = -m'.a'$$

$$T + f_{at} - m.g.sen(\theta) = m.a$$

$$f_{at}.R - T.R = -I.\alpha$$

Como o momento de inércia é o momento de inércia de um cilindro com eixo de rotação no eixo do cilindro e podemos substituir a aceleração angular pela aceleração linear com o vínculo geométrico, a terceira equação fica:

$$f_{at}.R - T.R = -\frac{1}{2}.M.R^2.\frac{a}{R} \Rightarrow f_{at} - T = -\frac{1}{2}.m.a$$

Perceba que quando o disco se desloca em $2.\pi.R$, o bloco desce $4.\pi.R$, isso porquê além de haver o deslocamento do disco, ainda há o desenrolamento da fita. Portanto, isso implica em:

[†]Na prática, não faz diferença m' estar subindo ou descendo, só precisamos respeitar o sinal.

$$2.\Delta x + \Delta x' = 0 \Rightarrow 2.a + a' = 0$$

Agora vamos trabalhar com as equações de movimento obtidas pela Segunda Lei de Newton. Vamos fazer a segunda equação menos a terceira, assim conseguiremos descobrir a tensão em função apenas da aceleração a:

$$\left[T + f_{at} - m.g.sen(\theta)\right] - \left[f_{at} - T\right] = [m.a] - \left[-\frac{1}{2}.m.a\right]$$

$$2.T - m.g.sen(\theta) = \frac{3}{2}.m.a \Rightarrow T = \frac{3}{4}.m.a + \frac{m.g.sen(\theta)}{2}$$

Agora, na primeira equação obtida, substituímos o valor da tensão T:

$$\frac{3}{4}.m.a + \frac{m.g.sen(\theta)}{2} - m'.g = -m'.a'$$

Queremos a aceleração a' do bloco. Pelo vínculo que encontramos, podemos expressar a aceleração do disco em termos da aceleração do bloco:

$$a = \frac{-a'}{2}$$

Lembre-se que na expressão da Segunda Lei de Newton, já adicionamos o sinal negativo que diz respeito ao sentido da aceleração, aqui ele aparece novamente. Então adicionaremos apenas o módulo de a e desconsideraremos seu sinal, pois já foi considerado anteriormente. Substituindo na última equação obtida, seremos capazes de isolar a aceleração a', assim descobrindo a expressão para a aceleração do bloco:

$$\frac{3}{4}.m.\frac{a'}{2} + \frac{m.g.sen(\theta)}{2} - m'.g = -m'.a' \Rightarrow \frac{3}{8}.m.a' + \frac{m.g.sen(\theta)}{2} - m'.g = -m'.a'$$

$$\frac{m.g.sen(\theta)}{2} - m'.g = -m'.a' - \frac{3}{8}.m.a' = -\left[m' + \frac{3}{8}.m\right].a'$$

$$\left[m' + \frac{3}{8}.m\right].a' = -\frac{m.g.sen(\theta)}{2} + m'.g \Rightarrow a' = \frac{m' - \frac{m.sen(\theta)}{2}}{m' + \frac{3}{8}.m}.g$$

b A tensão na fita

Usando a equação de movimento do bloco, obtemos;

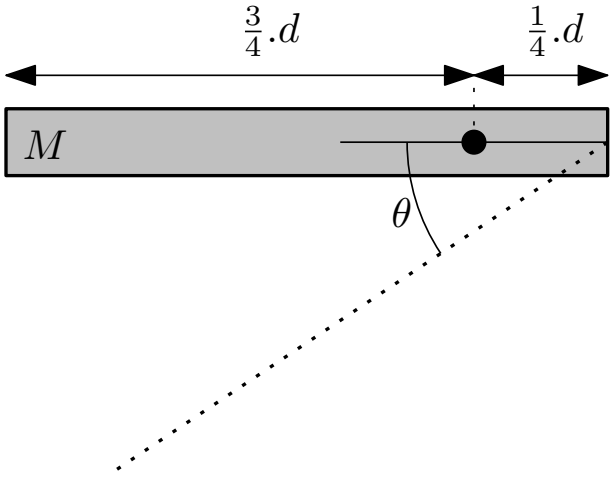
$$T = m'.(g - a') = m'.\left[g - \frac{m' - \frac{m.sen(\theta)}{2}}{m' + \frac{3}{8}.m}.g\right] = m'.g.\left[1 - \frac{m' - \frac{m.sen(\theta)}{2}}{m' + \frac{3}{8}.m}\right]$$

Para chegar ao resultado do gabarito teremos que fazer algumas manipulações algébricas:

$$T = m'.g.\left[\frac{m' + \frac{3}{8}.m - m' + \frac{m.sen(\theta)}{2}}{m' + \frac{3}{8}.m}\right] = m'.g.\left[\frac{\frac{3}{8}.m + \frac{m.sen(\theta)}{2}}{m' + \frac{3}{8}.m}\right] = m.m'.g.\left[\frac{\frac{3}{8} + \frac{sen(\theta)}{2}}{m' + \frac{3}{8}.m}\right]$$

$$T = m.m'.g.\left[\frac{\frac{3}{4} + sen(\theta)}{2.m' + \frac{3}{4}.m}\right]$$

12.13 Movimento de haste metálica delgada



a Momento de inércia em torno do eixo de rotação

Caso o eixo de rotação estivesse no centro de massa, o momento de inércia seria:

$$I_{cm} = \frac{1}{12}.M.d^2$$

Porém, não é o caso. Primeiramente, descobrimos a distância do eixo ao centro de massa:

$$d_e = \frac{3}{4}.d - \frac{1}{2}.d = \frac{3}{4}.d - \frac{2}{4}.d = \frac{3-2}{4}.d = \frac{1}{4}.d$$

Pelo Teorema dos Eixos Paralelos, obtemos:

$$I = I_{cm} + M.d_e^2 = \frac{1}{12}.M.d^2 + \frac{1}{16}.M.d^2 = \frac{16+12}{16.12}.M.d^2 = \frac{28}{16.12}.M.d^2$$

$$I = \frac{7}{48}.M.d^2$$

b Velocidade e aceleração angulares após deslocamento angular θ

Pela figura, observe que o centro de massa desce uma altura h dada por:

$$sen(\theta) = \frac{h}{\frac{d}{4}} \Rightarrow h = \frac{d}{4}.sen(\theta)$$

Então podemos dizer que inicialmente esta é a altura do centro de massa, e que no final não há energia potencial gravitacional, havendo apenas energia cinética de rotação[‡]. Aplicando a conservação de energia, obtemos:

[‡]Não há translação, pois a barra está presa.

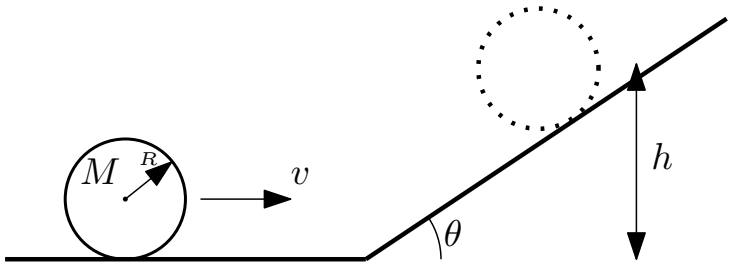
$$M.g.h = \frac{1}{2}.I.\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2.M.g.h}{I}} = \sqrt{\frac{2.M.g.\frac{d}{4}.sen(\theta)}{\frac{7}{48}.M.d^2}} = \sqrt{\frac{24}{7}.\frac{g}{d}.sen(\theta)}$$

Aplicando a Segunda Lei de Newton da rotação, podemos descobrir a aceleração angular da barra. Observe que nesse caso, a força que gera o torque é o próprio peso da barra:

$$\sum \tau = I.\alpha \Rightarrow M.g.\frac{d}{4}.sen(\theta) = I.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M.g.d}{4.I}.sen(\theta) = \frac{M.g.d}{4.\frac{7}{48}.M.d^2}.sen(\theta)$$

$$\alpha = \frac{12}{7}.\frac{g}{d}.sen(\theta)$$

12.14 Roda cilíndrica subindo em plano inclinado



Como o cilindro agora não tem mais as dimensões desprezíveis, inicialmente o mesmo tem energia potencial gravitacional. No mais, só precisamos aplicar a conservação de energia:

$$M.g.h_1 + \frac{1}{2}.M.v^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2 = M.g.h_2$$

Inicialmente, o centro de massa se encontra a uma altura R do chão. Como o cilindro gira em torno do centro de massa, o momento de inércia é o já conhecido $\frac{1}{2}.M.R^2$ e podemos escrever a velocidade angular em função da velocidade linear com o vínculo geométrico.

$$M.g.R + \frac{1}{2}.M.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.M.R^2.\frac{v^2}{R^2} = M.g.h_2$$

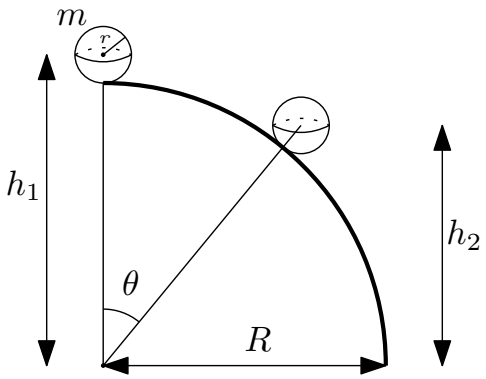
$$g.R + \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{4}.v^2 = g.h_2$$

$$g.R + \frac{6}{8}.v^2 = g.h_2$$

$$h_2 = R + \frac{3}{4}.\frac{v^2}{g}$$

Perceba que é a altura alcançada por uma massa pontual somada com o raio do cilindro.

12.15 Bola rolando em domo esférico



a Ângulo em que a bola desprende do domo

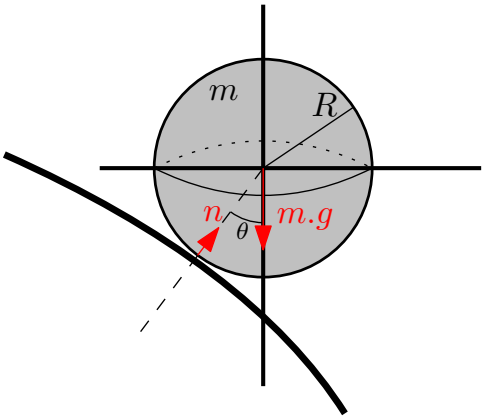
Inicialmente, temos apenas energia potencial gravitacional, e esta é convertida parcialmente em energia cinética (de translação e rotação) quando a bola percorre um ângulo θ com a vertical. Então, aplicando a conservação de energia:

$$m.g.h_1 = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.I.\omega^2 + m.g.h_2$$

O momento de inércia de uma esfera sólida com eixo de rotação passando pelo seu centro de massa é $\frac{2}{5}.m.r^2$. Podemos ainda expressar a velocidade angular em função da velocidade linear com o vínculo geométrico. Com isso, obtemos:

$$m.g.h_1 = \frac{1}{2}.m.v^2 + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.m.r^2.\frac{v^2}{r^2} + m.g.h_2 \Rightarrow g.h_1 = \frac{1}{2}.v^2 + \frac{1}{5}.v^2 + g.h_2$$

$$g.h_1 = \frac{7}{10}.v^2 + g.h_2$$



O valor da velocidade pode ser descoberto aplicando a Segunda Lei de Newton, considerando a componente do peso da bola como agente centrípeta:

$$\sum F_r = m.a_r = m.\frac{v^2}{R+r} \Rightarrow m.g.cos(\theta) - n = m.\frac{v^2}{R+r}$$

O valor da velocidade pode ser descoberto aplicando a Segunda Lei de Newton, considerando a componente do peso da bola como agente centrípeta:

$$\sum F_r = m.a_r = m.\frac{v^2}{R+r} \Rightarrow m.g.cos(\theta) - n = m.\frac{v^2}{R+r}$$

Como quero saber o ângulo θ tal que a bola se desprenda da superfície do domo, ou seja, queremos que $n = 0\ N$. Portanto, a velocidade fica:

$$m.g.cos(\theta) = m.\frac{v^2}{R+r} \Rightarrow v^2 = (R+r).g.cos(\theta) \Rightarrow v = \sqrt{(R+r).g.cos(\theta)}$$

Substituindo a velocidade na equação de conservação de energia:

$$g.h_1 = \frac{7}{10}.[(R+r).g.cos(\theta)] + g.h_2 \Rightarrow h_1 = \frac{7}{10}.(R+r).cos(\theta) + h_2$$

As alturas h_1 e h_2 são obtidas facilmente usando Trigonometria:

$$h_1 = R + r$$

$$h_2 = (R+r).cos(\theta)$$

Substituindo, obtemos:

$$R + r = \frac{7}{10}.(R+r).cos(\theta) + (R+r).cos(\theta) = \frac{17}{10}.(R+r).cos(\theta) \Rightarrow cos(\theta) = \frac{10}{17}$$

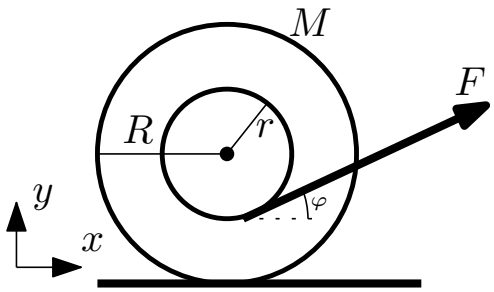
$$\theta = arccos\left(\frac{10}{17}\right) = 54^\circ$$

b Velocidade linear no momento do desprendimento

Já encontramos a equação da velocidade dependendo do ângulo θ:

$$v = \sqrt{(R+r).g.\frac{10}{17}}$$

12.16 Movimento de ioiô



a Condição do módulo da força para que o ioiô permaneça no chão

Se a soma das forças em y é zero, temos que o ioiô permanece em repouso ou sobe com velocidade constante. Portanto, aplicando a condição de equilíbrio, obtemos:

$$F_y - M.g = 0 \Rightarrow F.sen(\varphi) - M.g = 0 \Rightarrow F = \frac{M.g}{sen(\varphi)}$$

Logo, a força deve ser menor que a força que garante o equilíbrio, assim podemos afirmar que o corpo não subirá com velocidade constante:

$$F < \frac{m.g}{sen(\varphi)}$$

b Aceleração angular do ioiô

Aplicando a Segunda Lei de Newton da translação e rotação, respectivamente, obtemos:

$$\sum F_x = M.a \Rightarrow F.cos(\varphi) - f = -M.a$$

$$\sum \tau_z = I.\alpha \Rightarrow F.r - f.R = I_{cm}.\alpha$$

Isolando o atrito f em cada uma das expressões, podemos igualá-las:

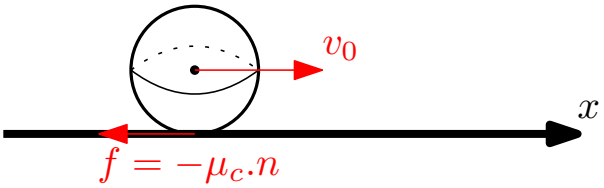
$$F.cos(\varphi) + M.a = \frac{F.r - I_{cm}.\alpha}{R}$$

Queremos a aceleração angular, então vamos usar o vínculo geométrico para substituir a aceleração linear:

$$F.cos(\varphi) + M.\alpha.R = \frac{F.r - I_{cm}.\alpha}{R} \Rightarrow M.R.\alpha + \frac{I_{cm}}{R}.\alpha = \frac{r}{R}.F - F.cos(\varphi)$$

$$M.R^2.\alpha + I_{cm}.\alpha = r.F - F.R.cos(\varphi) \Rightarrow \alpha = \frac{F.(r - R.cos(\varphi))}{I_{cm} + M.R^2}$$

12.17 Esfera se deslocando em plano horizontal com atrito



a Distância percorrida até começar a rolar

Aplicando a Segunda Lei de Newton da translação a horizontal, obtemos:

$$\sum F_x = m.a \Rightarrow -f = -mu_c.n = -\mu.m.g = m.a \Rightarrow a = -\mu_c.g$$

Então, a função velocidade da esfera será:

$$v = v_0 + a.t = v_0 - \mu_c.g.t$$

Agora aplicamos a Segunda Lei de Newton da rotação:

$$\sum \tau_z = I.\alpha \Rightarrow f.r = \mu_c.n.r = \mu_c.m.g.r = I.\alpha$$

Para um esfera sólida com eixo de rotação passando em seu centro, o momento de inércia é $\frac{2}{5}.m.r^2$.

$$\mu_c.m.g.r = \frac{2}{5}.m.r^2.\alpha \Rightarrow \mu_c.g = \frac{2}{5}.r.\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{5}{2}.\frac{\mu_c.g}{r}$$

Portanto, a velocidade angular da esfera pode ser expressão pela equação:

$$\omega = \omega_0 + \alpha.t = 0 + \frac{5}{2}.\frac{\mu_c.g}{r}.t = \frac{5}{2}.\frac{\mu_c.g}{r}.t$$

Agora, a partir do momento em que consideramos o vínculo $v = \omega.r$, estamos dizendo que a esfera está rotacionando. Faremos isso na função da velocidade angular:

$$\frac{v}{r} = \frac{5}{2}.\frac{\mu_c.g}{r}.t \Rightarrow v = \frac{5}{2}.\mu_c.g.t$$

Agora igualamos as velocidades, assim descobrimos o tempo decorrido até a rotação valer:

$$v_0 - \mu_c.g.t = \frac{5}{2}.\mu_c.g.t \Rightarrow v_0 = \mu_c.g.t + \frac{5}{2}.\mu_c.g.t = \left[\mu_c.g + \frac{5}{2}.\mu_c.g\right].t = \frac{7}{2}.\mu_c.g.t$$

$$t = \frac{2}{7}.\frac{v_0}{\mu_c.g}$$

Logo, substituindo isso na equação horária da posição, obtemos:

$$x = x_0 + v_0.t + \frac{1}{2}.a.t^2 \Rightarrow \Delta x = v_0.\left[\frac{2}{7}.\frac{v_0}{\mu_c.g}\right] - \frac{1}{2}.\mu_c.g.\left[\frac{2}{7}.\frac{v_0}{\mu_c.g}\right]^2$$

$$\Delta x = \frac{2}{7}.\frac{v_0^2}{\mu_c.g} - \frac{2}{49}.\frac{v_0^2}{\mu_c.g} = \frac{12}{49}.\frac{v_0^2}{\mu_c.g}$$

b Tempo decorrido até a rotação iniciar

Para obter o resultado do item anterior, precisamos calcular o tempo. O valor obtido foi:

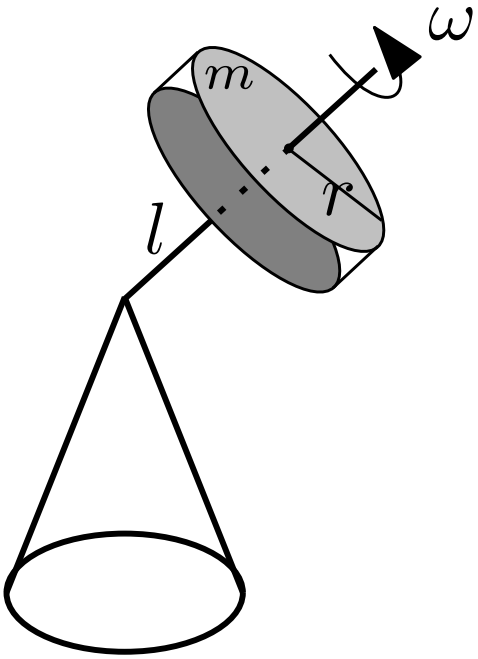
$$t = \frac{2}{7}.\frac{v_0}{\mu_c.g}$$

c Velocidade da esfera quando a rotação inicia

Vamos substituir o tempo t na primeira função velocidade obtida:

$$v = v_0 + a.t = v_0 - \mu_c.g.\left[\frac{2}{7}.\frac{v_0}{\mu_c.g}\right] = \frac{5}{7}.v_0$$

12.18 Movimento de giroscópio



A equação da precessão nos diz que a velocidade angular de precessão é dada por:

$$\Omega = \frac{m.g.l}{I.\omega}$$

O eixo de rotação passa pelo centro do disco, então o momento de inércia é $\frac{1}{2}.m.r^2$:

$$\Omega = \frac{m.g.l}{\frac{1}{2}.m.r^2.\omega} = \frac{2.g.l}{\omega.r^2}$$

O valor da velocidade angular deve ser dado em $\frac{rad}{s}$, temos que convertê-lo:

$$\omega = 1500.\frac{2.\pi}{60} = 50.\pi \ \frac{rad}{s}$$

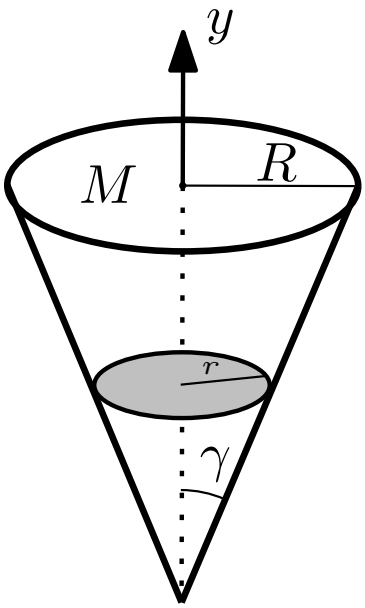
Como a massa está no centro da haste, o braço de alavanca l será a metade do comprimento total da haste. Portanto, a velocidade angular de precessão é:

$$\Omega = \frac{2.g.l}{50.\pi.r^2} = \frac{2.9,81.0,05}{50.\pi.0,05^2} = 2,5 \ \frac{rad}{s}$$

Queremos o valor em rotações por minuto (rpm), portanto:

$$\Omega = 2,5.\frac{60}{2.\pi} = 23,9 \ rpm$$

12.19 Pião cônico



a Posição do centro de massa

Considerando um pião convencional, consideraremos o vértice do cone direcionado para o chão. O centro de massa pode ser calculado como sempre, mas agora considerando discos de altura infinitesimal compondo o cone:

$$y_{cm} = \frac{\int y\ dm}{M} = \frac{1}{M}.\int y\ dm$$

dm é a massa infinitesimal de um disco de altura infinitesimal (um cilindro muito baixo). Então a massa de cada um desses discos será:

$$dm = \rho.dV = \rho.\pi.r^2.dy$$

Como a densidade do cone é uniforme, o cone e os discos têm a mesma densidade. Substituindo no cálculo do centro de massa:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}.\int y.\rho.\pi.r^2\ dy$$

Aplicamos a tangente no ângulo de abertura do cone, assim conseguimos expressar a altura y em função do raio de cada disco:

$$tg(\gamma) = \frac{r}{y} = \frac{R}{h} \Rightarrow y = \frac{h}{R}.r$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$y_{cm} = \frac{1}{M}.\int \frac{h}{R}.r.\rho.\pi.r^2\frac{h}{R}\ dr$$

Removendo todas as constantes da integral e integrando do raio 0 ao R:

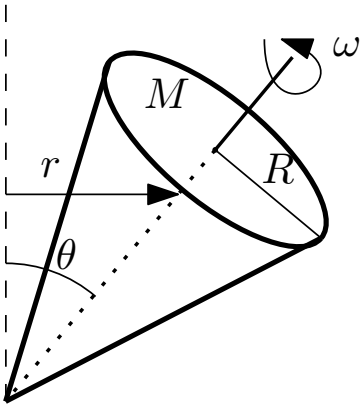
$$y_{cm} = \frac{h^2}{R^2}.\frac{\rho.\pi}{M}.\int_0^R r^3\ dr = \frac{h^2}{R^2}.\frac{\rho.\pi}{M}.\frac{R^4}{4} = \frac{1}{4}.h^2.\frac{R^2.\pi}{M}.\rho$$

A densidade pode ser expressa em função da massa e volume total do cone:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{3}.\pi.R^2.h} = \frac{3.M}{\pi.R^2.h}$$

Substituindo na expressão do centro de massa:

$$y_{cm} = \frac{1}{4}.h^2.\frac{R^2.\pi}{M}.\frac{3.M}{\pi.R^2.h} = \frac{3}{4}.h$$



b Velocidade angular de precessão

Como já vimos, a velocidade angular de precessão é dada por:

$$\Omega = \frac{m.g.l}{I.\omega}$$

O braço de alavanca será a altura do centro de massa que calculamos anteriormente, e o momento de inércia em torno do eixo do cone também já foi calculado anteriormente:

$$\Omega = \frac{M.g.\frac{3}{4}.h}{\frac{3}{10}.M.R^2.\omega} = \frac{5}{2}.\frac{g.h}{\omega.R^2}$$

c Força de reação horizontal na base do pião

A força de reação é igual a força centrípeta que faz com que o pião gire. Então teremos:

$$F = M.a_c = M.\frac{v^2}{r} = M.\frac{\omega^2.r^2}{r} = M.\omega^2.r$$

Lembre que a velocidade de rotação e a velocidade de rotação de precessão são conectadas pela equação:

$$\omega = \Omega.sen(\theta)$$

Substituindo:

$$F = M.(\Omega.sen(\theta))^2.r = M.\Omega^2.sen^2(\theta).r$$

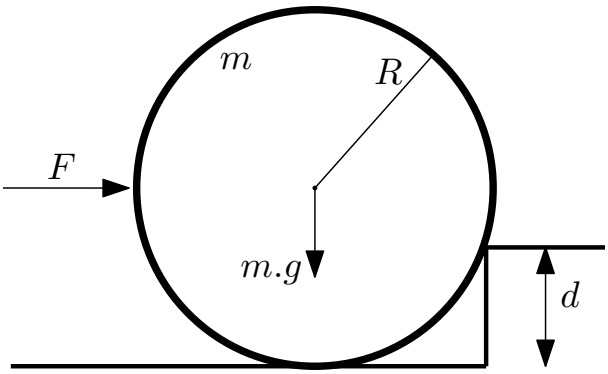
Perceba que $y_{cm} = r.sen(\theta)$. Portanto, a força será:

$$F = M.\Omega^2.y_{cm}.sen(\theta) \Rightarrow F = \frac{3}{4}.M.\Omega^2.sen(\theta).h$$

d Encontrando os valores de Ω e F

Vamos apenas substituir os valores nas equações encontradas, porém enunciado não traz todas as informações necessárias.

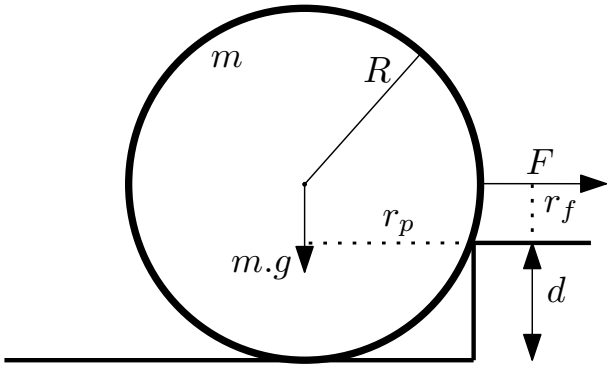
12.20 Tambor cilíndrico subindo degrau



O tambor cilíndrico subirá o degrau quando o torque exercido pela força F for, pelo menos, igual ao torque exercido pelo peso p, assim o tambor rotacionará com velocidade angular constante. Aplicando a condição de equilíbrio para a rotação, obtemos:

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow F.r_f - m.g.r_p = 0 \Rightarrow F = m.g.\frac{r_p}{r_f}$$

Nosso trabalho agora será expressar os braços de alavanca r_f e r_p em função das distâncias conhecidas.



O braço de alavanca da força F é facilmente descoberto ao movermos o vetor:

$$d + r_f = R \Rightarrow r_f = R - d$$

O braço de alavanca da força peso é um pouco mais complicado, mas aplicando o Teorema de Pitágoras, é possível encontrá-lo facilmente:

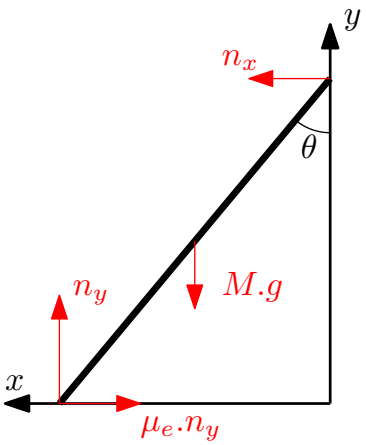
$$R^2 = r_p^2 + (R-d)^2 \Rightarrow r_p^2 = R^2 - (R-d)^2$$

$$r_p^2 = R^2 - R^2 - d^2 + 2.R.d \Rightarrow r_p = \sqrt{2.R.d - d^2}$$

Substituindo, obtemos:

$$F = m.g.\frac{\sqrt{2.R.d - d^2}}{R-d}$$

12.21 Ângulo formado pela escada para não escorregar



Inicialmente, vamos aplicar a condição de equilíbrio nas direções horizontal e vertical, respectivamente:

$$n_x - \mu_e.n_y = 0$$

$$n_y - M.g = 0 \Rightarrow n_y = M.g$$

Agora vamos aplicar a condição de equilíbrio para a escada, sendo o eixo de rotação a base que está no chão:

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow M.g.r_p - n_x.r_{n_x} = 0$$

Os braços de alavanca são encontrados facilmente com auxílio da Trigonometria:

$$M.g.\frac{L}{2}.sen(\theta) - n_x.L.cos(\theta) = 0 \Rightarrow n_x = M.g.\frac{tg(\theta)}{2}$$

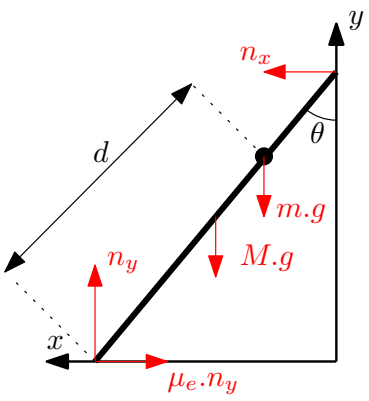
Substituindo os valores das normais na equação de equilíbrio horizontal, obtemos:

$$M.g.\frac{tg(\theta)}{2} - \mu_e.M.g = 0 \Rightarrow tg(\theta) = 2.\mu_e$$

Lembre que a condição de equilíbrio não garante o repouso, mas sim a aceleração nula. Por isso, os ângulos para a que a escada não escorregue devem respeitar a desigualdade:

$$tg(\theta) < 2.\mu_e$$

12.22 Distância máxima que um homem pode subir na escada



Agora considerando um homem na escada, as condições de equilíbrio horizontal e vertical, respectivamente, serão:

$$n_x - \mu_e.n_y = 0$$

$$n_y - M.g - m.g = 0 \Rightarrow n_y = (M+m).g$$

Também haverá mudanças na condição de equilíbrio de rotação, agora teremos:

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow M.g.r_p + m.g.r_h - n_x.r_{n_x} = 0$$

Os braços de alavanca, obviamente, são os mesmos. Porém agora temos o homem, que facilmente é descoberto usando a Trigonometria:

$$M.g.\frac{L}{2}.sen(\theta) + m.g.d.sen(\theta) - n_x.L.cos(\theta) = 0 \Rightarrow n_x = M.g.\frac{tg(\theta)}{2} + m.g.\frac{d}{L}.tg(\theta)$$

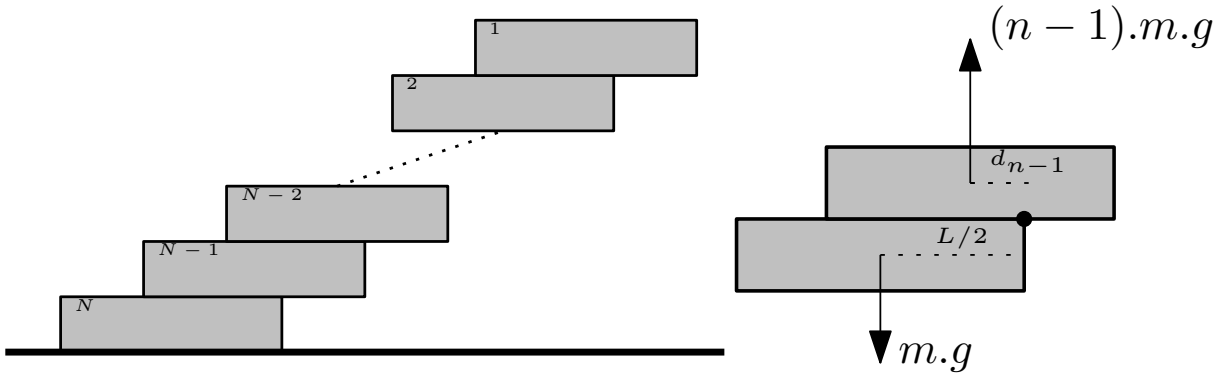
Então, novamente substituindo na equação de equilíbrio horizontal, obtemos:

$$M.g.\frac{tg(\theta)}{2} + m.g.\frac{d}{L}.tg(\theta) - \mu_e.(M+m).g = 0 \Rightarrow M.\frac{tg(\theta)}{2} + m.\frac{d}{L}.tg(\theta) - \mu_e.(M+m) = 0$$

$$m.\frac{d}{L}.tg(\theta) = \mu_e.(M+m) - M.\frac{tg(\theta)}{2} \Rightarrow m.\frac{d}{L} = \mu_e.cotg(\theta).(M+m) - M.\frac{1}{2}$$

$$d = \frac{L}{m}.\mu_e.cotg(\theta).(M+m) - \frac{L}{m}.M.\frac{1}{2} \Rightarrow d = \frac{M}{m}.L.\left(\mu_e.cotg(\theta).\left[1 + \frac{m}{M}\right] - \frac{1}{2}\right)$$

12.23 Empilhando blocos



A dica dada no enunciado é de suma importância. Aplicando a condição de equilíbrio de rotação para o n-ésimo bloco, obtemos:

$$m.g.\frac{L}{2} - (n-1).M.g.d_{n-1} = 0$$

Perceba que assim fixamos a contagem de blocos de cima para baixo, ou seja, o penúltimo bloco será o nosso bloco $n = 2$, veja que se substituímos isso na equação acima vemos que há exatamente 1 bloco acima dele. Isolando a distância d_{n-1}:

$$d_{n-1} = \frac{L}{2.(n-1)}$$

Essa distância é a distância do centro de massa das $n-1$ massas que estão em cima do respectivo bloco até a sua extremidade[§].

Para obter a distância d total, somamos todos os valores de d_{n-1}, indo de $n = 2$ até $n = N$:

$$d = d_1 + d_2 + ... + d_{N-1} = \frac{L}{2} + \frac{L}{4} + ... + \frac{L}{2.(N-1)} = \frac{L}{2}.\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{N-1}\right]$$

[§]Caso ache estranho, teste por exemplo para $n = 2$. Você verá que obteremos o resultado esperado, e é mais claro pois se trata de um sistema mais simples do que o com N blocos.

CAPÍTULO

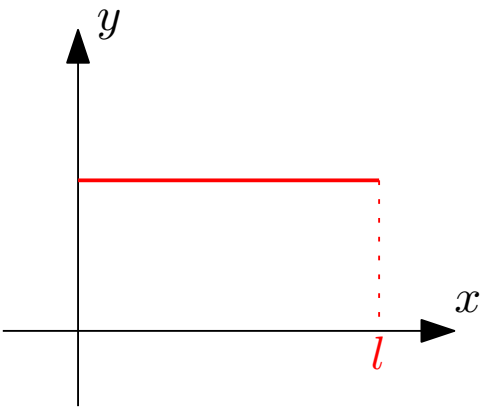
13

FORÇAS DE INÉRCIA

"A imaginação é mais importante que o conhecimento. O conhecimento é limitado, enquanto a imaginação abraça o mundo inteiro."

Albert Einstein

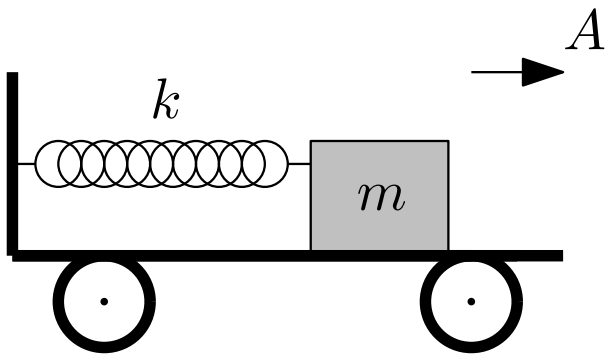
13.1 O problema do caçador e o macaco do ponto de vista do macaco



Para o macaco, o dardo vem em linha reta. Como o dardo e o macaco estão submetidos à mesma aceleração, o macaco verá o dardo sempre na mesma posição vertical, por isso, para ele, o dardo vem em linha reta.
Logo, o tempo de deslocamento é:

$$v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{l}{t} \Rightarrow t = \frac{l}{v_0}$$

13.2 Sistema massa-mola submetido à aceleração



a Amplitude da oscilação

A amplitude da oscilação é uma dada distância x que faz com que a força elástica anule a força externa (que gera a aceleração A). Ou seja, aplicando a condição de equilíbrio, obtemos:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow k.x - m.A = 0 \Rightarrow x = \frac{m.A}{k} = \frac{1.2,5}{25} = 0,1\ m$$

b Período da oscilação

Sabemos que podemos expressar a frequência angular em termos da massa e da constante de mola, mas também pode ser expressa em função do período. Por isso, podemos descobrir facilmente o período:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2.\pi}{T} \Rightarrow T = 2.\pi.\sqrt{\frac{m}{k}} = 2.\pi.\sqrt{\frac{1}{25}} = 1,26\ s$$

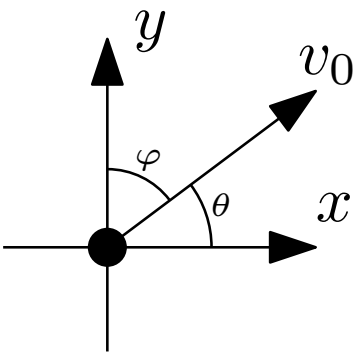
c Compressão máxima da mola

Para quem vê de fora do carrinho, no momento em que a mola está comprimindo, a aceleração dada ao bloco é $2.A$ *. Por isso, usando a mesma equação do item ***a***, obtemos:

$$x_{max} = \frac{2.m.A}{k} = \frac{2.1.2,5}{25} = 0,2\ m$$

*sendo A da aceleração do carrinho e A da aceleração imposta pela própria mola.

13.3 Lançando bola em caminhão acelerado



Pela cinemática, podemos descobrir o tempo de subida[a]. Assim, obtemos:

$$v_y = v_{0_y} - g.t \Rightarrow 0 = v_{0_y} - g.t \Rightarrow t = \frac{v_0.sen(\theta)}{g} \Rightarrow t_T = 2.t = 2.\frac{v_0}{g}.sen(\theta)$$

[a]Consequentemente, o tempo total, pois ele é o dobro do tempo de subida.

Como inicialmente os corpos estão juntos no caminhão, eles têm a mesma velocidade. Então o deslocamento do caminhão (c) e da bola (b) são, respectivamente:

$$\Delta x_c = \frac{1}{2}.a.t_T^2$$

$$\Delta x_b = v_{0_x}.t_T$$

Queremos que a variação de posição sejam iguais. Então vamos igualar as duas equações:

$$\frac{1}{2}.a.t_T^2 = v_{0_x}.t_T \Rightarrow \frac{1}{2}.a.t_T = v_{0_x} \Rightarrow \frac{1}{2}.a.2.\frac{v_0}{g}.sen(\theta) = v_0.cos(\theta) \Rightarrow tg(\theta) = \frac{g}{a}$$

Como sabemos a aceleração do caminhão, obtemos que o ângulo deve ser:

$$\theta = arctg\left(\frac{g}{a}\right) = arctg\left(\frac{9,81}{3,0}\right) = 73^\circ$$

Mas, pela figura, não queremos θ, mas sim φ. Portanto:

$$\theta + \varphi = 90^\circ \Rightarrow \varphi = 90^\circ - \theta = 90^\circ - 73^\circ = 17^\circ$$

13.4 Balança no elevador

Inicialmente, vamos aplicar a Segunda Lei de Newton para o homem:

$$\sum F_y = m.a_y \Rightarrow F_{el} - p = k.l - m.g = m.a_y$$

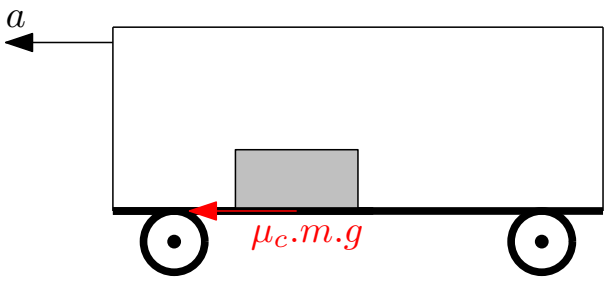
A força elástica $k.l$ é quem dirá o peso marcado no visor da balança. Sendo assim, podemos dizer que $k.l = m'.g$, sendo m' a massa marcada pela balança. Assim, obtemos:

$$m'.g - m.g = m.a_y \Rightarrow a_y = \frac{m' - m}{m}.g = \frac{85 - 100}{100}.9,8 = -1,5\ \frac{m}{s^2}$$

O sinal negativo indica que o elevador está freando.

De modo geral, a balança marcará um valor maior que o real se o elevador estiver acelerando, e um valor menor se o elevador estiver freando.

13.5 Caixote dentro de caminhão freando



Imagine que você está dentro do caminhão. Quando mesmo freia, você tende a ir para frente, por isso o atrito aponta para trás!

a Velocidade do caixote ao caminhão parar

Inicialmente, vamos descobrir o tempo que o caminhão leva até ficar em repouso. Sabemos a velocidade inicial e a aceleração, então podemos aplicar a equação horária da velocidade:

$$v_x = v_{0_x} + a_x.t \Rightarrow t = \frac{v_x - v_{0_x}}{a_x} = \frac{0 - \frac{90}{3,6}}{-2,5} = 10\ s$$

Indo para dentro do caminhão, podemos aplicar a Segunda Lei de Newton ao caixote. Assim, obtemos:

$$\sum F_x = m.a'_x \Rightarrow -\mu_c.n = -\mu_c.m.g = m.a'_x \Rightarrow a'_x = -\mu_c.g$$

Agora podemos aplicar novamente a equação horária da velocidade, mas agora para o caixote:

$$v_x = v_{0_x} + a'_x.t = v_{0_x} - \mu_c.g.t = \frac{90}{3,6} - 0,25.9,8.10 = 0,5\ \frac{m}{s}$$

b Deslocamento relativo do caixote

Perceba que o caminhão se desloca, e o caixote, sobre o caminhão, também se desloca. Então para sabermos o "deslocamento líquido"do caixote, deveremos considerar o movimento relativo:

$$d_{cx} = \Delta x_{cx} - \Delta x_{cm}$$

Pela equação de Torricelli, obtemos:

$$v_x^2 = v_{0_x}^2 + 2.a_x.\Delta x \Rightarrow \Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{2.a_x}$$

Para o caixote e para o caminhão, teremos, respectivamente:

$$\Delta x_{cx} = \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{-2.\mu_c.g} = \frac{0,5^2 - \left(\frac{90}{3,6}\right)^2}{-2.0,25.9,8} = 127,5\ m$$

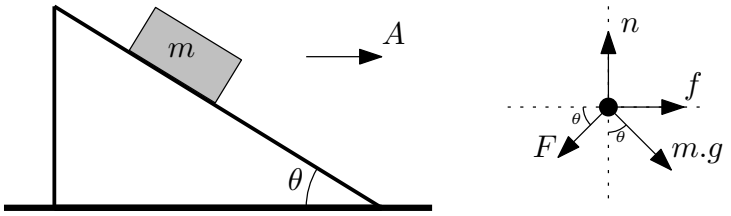
$$\Delta x_{cm} = \frac{v_x^2 - v_{0_x}^2}{-2.a} = \frac{0 - \left(\frac{90}{3,6}\right)^2}{-2.2,5} = 125\ m$$

Portanto, o caixote deslocou-se:

$$d_{cx} = 127,5 - 125 = 2,5\ m$$

Isso significa que se inicialmente o caixote estava na beirada da traseira, quando caminhão para, ele dista $2,5\ m$ da beirada.

13.6 Bloco em cunha acelerada



Primeiramente, podemos descobrir a força F que gera a aceleração A. Será simplesmente:

$$\sum F_x = m.a = m.A \Rightarrow F = m.A$$

Aplicando a condição de equilíbrio à vertical, obtemos:

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow n - m.g.cos(\theta) - F.sen(\theta) = 0 \Rightarrow n = m.g.cos(\theta) + F.sen(\theta)$$

Agora aplicamos a condição de equilíbrio à vertical:

$$f + m.g.sen(\theta) - F.cos(\theta) = 0 \Rightarrow \mu_e.n + m.g.sen(\theta) - F.cos(\theta) = 0$$

Agora substituímos o valor da normal e da força F, e tentamos isolar A:

$$\mu_e.\Big[m.g.cos(\theta) + m.A.sen(\theta)\Big] + m.g.sen(\theta) - m.A.cos(\theta) = 0$$

$$\mu_e.\Big[g.cos(\theta) + A.sen(\theta)\Big] + g.sen(\theta) - A.cos(\theta) = 0$$

$$\mu_e.g.cos(\theta) + \mu_e.A.sen(\theta) + g.sen(\theta) - A.cos(\theta) = 0$$

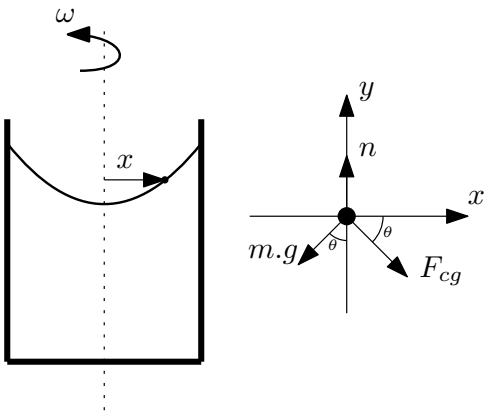
$$\mu_e.g.cos(\theta) + g.sen(\theta) = A.cos(\theta) - \mu_e.A.sen(\theta) = A.[cos(\theta) - \mu_e.sen(\theta)]$$

$$A = \frac{\mu_e.g.cos(\theta) + g.sen(\theta)}{cos(\theta) - \mu_e.sen(\theta)} = \frac{\mu_e.cos(\theta) + sen(\theta)}{cos(\theta) - \mu_e.sen(\theta)}.g$$

Como esse valor de aceleração foi obtido partindo das condições de equilíbrio, quando esta aceleração for atingida o bloco poderá subir o plano inclinado com velocidade constante. Logo, esta é a aceleração limite. Colocando o $cos(\theta)$ em evidência no numerador e denominador, obtemos:

$$A = \frac{\mu_e + tg(\theta)}{1 - \mu_e.tg(\theta)}.g$$

13.7 Balde com água em rotação



Como cada parcela de água se mantém a uma distância x fixa do eixo de rotação, podemos concluir que a condição de equilíbrio deve valer neste respectivo eixo. Aplicando-a, obtemos:

$$f_{cg}.cos(\theta) - m.g.sen(\theta) = 0$$

Como a força centrífuga (que "empurra"a água para fora) é igual à força centrípeta (que "puxa"a água para dentro), podemos escrever que:

$$F_{cg} = F_{cp} = m.\frac{v^2}{x}$$

Substituindo:

$$m.\frac{v^2}{x}.cos(\theta) - m.g.sen(\theta) = 0 \Rightarrow \frac{v^2}{x} = g.tg(\theta)$$

Podemos usar o vínculo geométrico e reescrever a velocidade linear:

$$tg(\theta) = \frac{\omega^2.x^2}{x.g} = \frac{\omega^2}{g}.x$$

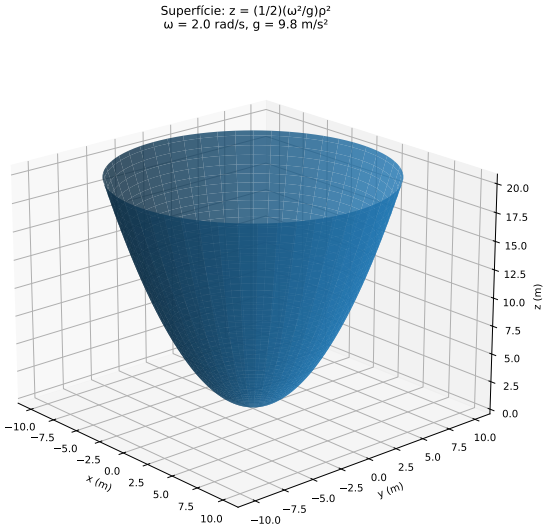
Por fim, escrevemos a tangente como um diferencial e integramos:

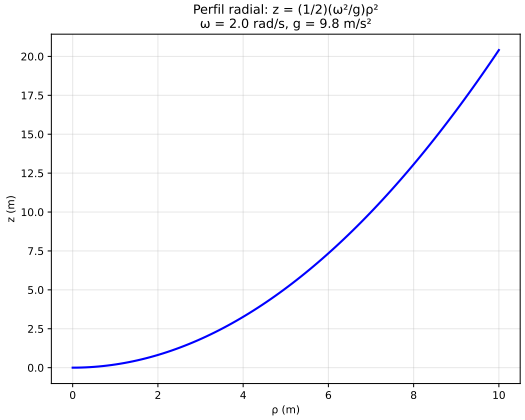
$$tg(\theta) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = \frac{\omega^2}{g}.x\ dx \Rightarrow y = \frac{\omega^2}{g}.\int x\ dx = \frac{1}{2}.\frac{\omega^2}{g}.x^2$$

Resolvemos o problema de forma bidimensional, mas ele tem validade em 3 coordenadas. Sendo expresso por:

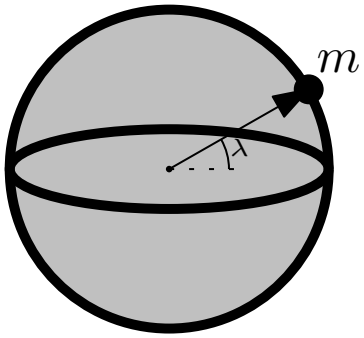
$$z = \frac{1}{2}.\frac{\omega^2}{g}.\rho^2$$

Com $\rho^2 = x^2 + y^2$.


Superfície: z = (1/2)(ω²/g)ρ²
ω = 2.0 rad/s, g = 9.8 m/s²
x (m)
y (m)
z (m)


Perfil radial: z = (1/2)(ω²/g)ρ²
ω = 2.0 rad/s, g = 9.8 m/s²
z (m)
ρ (m)

13.8 Latitude que maximiza a distância angular entre o fio de prumo e a direção radial verdadeira



Durante o capítulo, obtivemos que as componentes de força sobre o fio de prumo são:

$$F'_r = -m.g + m.\omega^2.R.cos^2(\lambda)$$

$$F'_\theta = m.\omega^2.R.sen(\lambda).cos(\lambda)$$

Com isso, já podemos calcular o ângulo de desvio aplicando a tangente:

$$tg(\delta) = \frac{|F_\theta|}{|F_r|} = \frac{m.\omega^2.R.sen(\lambda).cos(\lambda)}{|-m.g + m.\omega^2.R.cos^2(\lambda)|}$$

Usando a Trigonometria, poderemos escrever que $cos(\lambda).sen(\lambda) = \frac{sen(2.\lambda)}{2}$, isso facilitará nossa interpretação:

$$tg(\delta) = \frac{1}{2}.\frac{m.\omega^2.R.sen(2.\lambda)}{|-m.g + m.\omega^2.R.cos^2(\lambda)|}$$

Perceba que a aceleração centrípeta na latitude λ é exatamente $\omega^2.R.cos(\theta)$. Como $a_{cp}.cos(\lambda) << g$, podemos fazer uma aproximação no denominador.

$$tg(\delta) \approx \frac{1}{2}.\frac{m.\omega^2.R.sen(2.\lambda)}{|-m.g|} = \frac{1}{2}.\frac{\omega^2.R.sen(2.\lambda)}{g}$$

Portanto, fica claro que o valor de λ que maximiza a função é $\lambda = 45°$.
Agora substituímos os valores e poderemos estimar o valor de δ.

$$tg(\delta) = \frac{1}{2}.\frac{\left(\frac{2.\pi}{24.3600}\right)^2.6,37.10^6.sen(2.45°)}{9,81} = 0,00172 \Rightarrow \delta = arctg(0,00172) = 0,1°$$

13.9 Força de Coriolis

No geral, a força de Coriolis é escrita como:

$$\vec{F} = -2.m.(\vec{\omega} \times \vec{v}\,')$$

O produto vetorial $\vec{\omega} \times \vec{v}\,'$ gera um vetor que aponta para fora da esfera, mas o sinal de menos inverte seu sentido. Assim, o produto vetorial resulta em um vetor que tem sempre uma componente apontando para o centro da circunferência descrita, funcionando como uma resultante centrípeta.

a Módulo da força de Coriolis

Primeiramente, vamos descobrir a massa total de ar movida:

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow m = \rho.V = 1,29.1 = 1,29\ Kg$$

Logo, o módulo será:

$$F = 2.m.|\vec{\omega} \times \vec{v}\,'| = 2.m.\omega.v'.sen(\theta) = 2.m.\omega.v'.cos(\lambda)$$

Substituindo os valores:

$$F = 2.1,29.\left(\frac{2.\pi}{24.3600}\right).\left(\frac{45}{3,6}\right).cos(45^\circ) = 1,7.10^{-3}\ N$$

b Raio de curvatura do movimento circular

A componente da força de Coriolis que aponta para o centro gerará uma resultante centrípeta, com ela poderemos determinar o raio de curvatura da revolução:

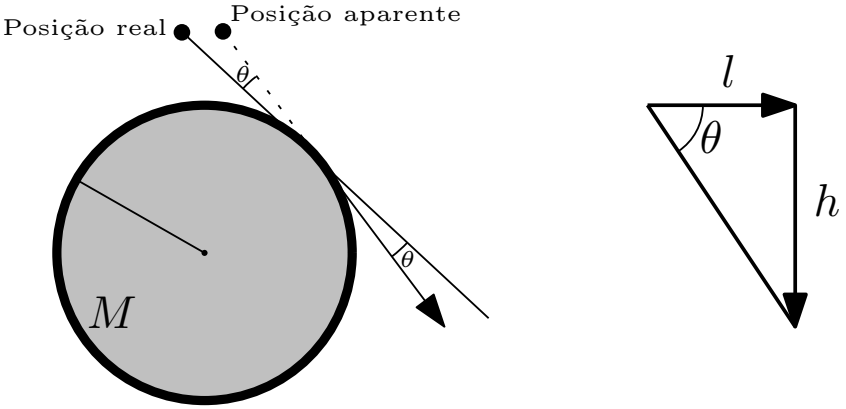
$$\sum F_r = m.a_r = m.\frac{v'^2}{r} \Rightarrow F_r = m.\frac{v'^2}{r} \Rightarrow r = \frac{m.v'^2}{F_r}$$

Pela regra da mão direita, a força de Coriolis inteira será nossa resultante centrípeta, e não apenas uma componente sua. Portanto:

$$r = \frac{1,29.\left(\frac{45}{3,6}\right)^2}{1,7.10^{-3}} = 1,2.10^5\ m = 120\ Km$$

13.10 Deflexão de um raio luminoso

O movimento do feixe de luz pode ser dividido em uma trajetória sem e outra com aceleração. Assim, é formado um triângulo com lados l (comprimento do arco gerado pela deflexão) e h que é o comprimento gerado pela aceleração da gravidade em uma queda livre.



Logo, a tangente do ângulo θ será:

$$tg(\theta) = \frac{h}{l}$$

Como não há variação de aceleração, pela equação horária da posição, a altura h será:

$$h = \frac{1}{2}.g.t^2$$

O tempo decorrido é o tempo que a luz leva para percorrer a distância l. Logo:

$$h = \frac{1}{2}.g.\left(\frac{l}{c}\right)^2$$

Substituindo na equação da tangente:

$$tg(\theta) = \frac{\frac{1}{2}.g.\left(\frac{l}{c}\right)^2}{l} = \frac{1}{2}.g.\frac{l}{c^2}$$

Lembre que podemos expressar a aceleração da gravidade em função do raio do Planeta e de sua massa:

$$tg(\theta) = \frac{1}{2}.\frac{G.M}{R^2}.\frac{l}{c^2} = \frac{1}{2}.\frac{G.M.l}{(R.c)^2}$$

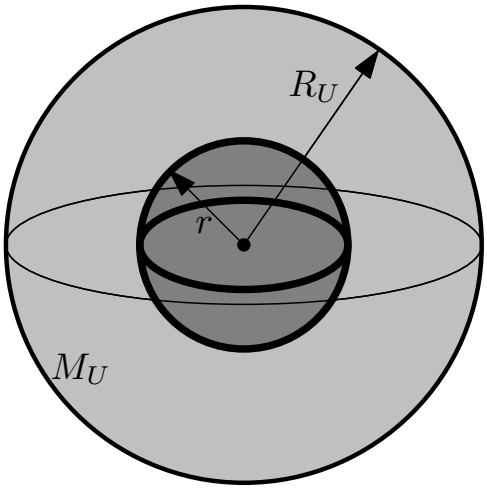
Substituindo os valores, obtemos:

$$tg(\theta) = \frac{1}{2}.\frac{6,67.10^{-11}.1,99.10^{30}.10^7}{(6,95.10^8.3.10^8)^2} = 1,527.10^{-8} \Rightarrow \theta = 8,75.10^{-7}\ ^\circ$$

Lembre que 1 grau são 3600 segundos de arco. Por isso, teremos:

$$\theta = 3600.8,75.10^{-7}\ '' = 3.10^{-3}\ ''$$

13.11 Estimando o valor de γ para uma distribuição contínua



O enunciado nos diz que:

$$\gamma = \sum_i \frac{G.M_i}{c^2.r_i}$$

Para uma distribuição contínua, e não mais discreta, podemos sair do somatório e ir para uma integração. Portanto:

$$\gamma = \int \frac{G}{c^2.r}\ dM = \frac{G}{c^2}.\int \frac{1}{r}\ dM$$

Considerando uma distribuição esférica, podemos expressar a massa dM da casca esférica de espessura dr em função de seu raio com a densidade:

$$\rho = \frac{dM}{dV} \Rightarrow dM = \rho.dV = \rho.4.\pi.r^2.dr$$

Substituindo na integração:

$$\gamma = \frac{G}{c^2}.\int \frac{1}{r}.\rho.4.\pi.r^2\ dr = \frac{G.4.\pi.\rho}{c^2}.\int r\ dr$$

Integraremos do centro do eixo da esfera (0) até sua borda (R_U):

$$\gamma = \frac{G.4.\pi.\rho}{c^2}.\int_0^{R_U} r\ dr = \frac{G.4.\pi.\rho}{c^2}.\frac{R_U^2}{2} = \frac{2.G.\pi.\rho}{c^2}.R_U^2$$

A densidade volumétrica é:

$$\rho = \frac{M_U}{V_U} = \frac{M_U}{\frac{4}{3}.\pi.R_U^3}$$

Substituindo na expressão de γ, obtemos:

$$\gamma = \frac{2.G.\pi}{c^2}.\frac{M_U}{\frac{4}{3}.\pi.R_U^3}.R_U^2 = \frac{3}{2}.\frac{G.M_U}{c^2.R_U}$$